1. KÖK BULMA

1.1 SAYISAL YÖNTEMLER

Günümüzde bilgisayarların kullanımı artık günlük hayatımızın bir parçası haline gelmiştir. Fizikte, matematikte, kimyada, biyolojide, astronomide, mühendislikte, genetikte, sağlıkta, ekonomide, şehir planlanmasında, beslenmede, iklimlendirmede ve benzeri birçok alanda karşılaşılan problemler artık sayısal yöntemlerin rahatlıkla kullanılabildiği bilgisayarlar aracılığı ile çözümlenebilmektedir. Bu problemlerin çözümleri öncelikle matematiksel modellerinin gerçeğe daha yakın olması ile doğru bir şekilde yapılabilmektedir. Nükleer bir reaktörün tasarlanması, hava tahmini, trafik akışının tahmini, değişik cisimlerin atmosfer içindeki hareketlerini incelemek ve bunların aerodinamik yapılarını tasarlamak, binaları tasarlamak ve dayanıklılığını test etmek, bir elektrik devresini tasarlamak ve değişik voltajlar altında çalışmasının incelenmesi gerçekci matematiksel modellerinin hazırlanması ve bu modellerin çeşitli *sayısal yöntemler* kullanılarak çözümlenmesi ile sağlanabilmektedir. Elde edilen sonuçlar analiz edilerek oluşturulacak sistemler üretim tesisleri kurulmadan sanal ortamda test edilebilmektedir. Bu kitapta değişik sayısal yöntemler kullanılarak problemlerin çözümü yapılacaktır. Burada şunu belirtmekte yarar vardır: Sayısal yöntemler sayısal analizden farklıdır. Sayısal yöntemlerde çözüm tekniği doğrudan probleme uygulanır. Sayısal yöntem ile bir diferensiyel denklemin çözümü sağlanabilir, veriler için bir eğri (fonksiyon) uydurulabilir, integral alma işlemleri yapılabilir, bir sisteme ait özdeğerler hesaplanabilir veya bir fonksiyonun kökü bulunabilir. Sayısal yöntemlerin problemlere uygulanması sonucunda tam çözümler elde edilemesede mühendislik açısından kabul edilebilecek değerler elde edilebilir.

Özetle sayısal yöntemler ile matematiksel olarak formülleştirilmiş problemlerin bilgisayar ortamında çözülebilir hale getirilmesi (benzetişiminin yapılması) amaçlanır. Günümüzde problemlerin çözümünde rahatlıkla kullanılabilecek bu tür yazılımların sayısı hızla artmaktadır.

Bölüm sonlarında verilen problemlerin bilgisayar programlarına uygulanmasında veya çözümlenmesinde verilen algoritmalardan yararlanabilirsiniz. Verilen kodlar içinde küçük değişiklikler yapılarak diğer problemlere kolayca uygulanabilir. Bunlar okuyucuya bırakılmıştır. Kodlar Fortran, C++, MS Visual BASIC bilgisayar programlama dillerinde ve MS Excel de verilmeye çalışılmıştır.

1.2 FONKSİYON KÖKLERİNİN HESAPLANMASI

Bir elektrik devresindeki akımın sıfır olduğu anlar, etkileşen iki yükü birleştiren doğru boyunca elektrik alanının sıfır olduğu nokta, diş sayıları farklı dişlilerin çakışma noktalarının veya bir sistemin özdeğerleri hesaplanırken fonksiyon köklerinin hesaplanması ile karşılaşılabilir. Temel bilimlerde veya mühendislik uygulamalarında yüksek dereceden polinomlar, üstel fonksiyonlar veya birçok terim içeren fonksiyonlar/eşitlikler karşımıza çıkabilir. Bazen bu tür fonksiyonları sıfır yapan köklerinin bulunması veya fonksiyonu minimum veya maksimum yapan değerlerinin bulunması gerekebilir. Bu bölümde bu tür problemrin çözümünde kullanılan sayısal teknikler anlatılacaktır. Bu fonksiyon aşağıdaki eşitlik (1.1) deki gibi çizgisel olmayan tek değişkenli bir fonksiyon veya eşitlik (1.2) deki gibi dördüncü dereceden bir polinom şeklinde olabilir:

$$\mathrm{e}^{-x} - \sin(\pi \tfrac{x}{2}) = 0 \tag{1.1}$$

veya

$$x^4 - x^3 - 10x^2 - x + 1 = 0 \tag{1.2}$$

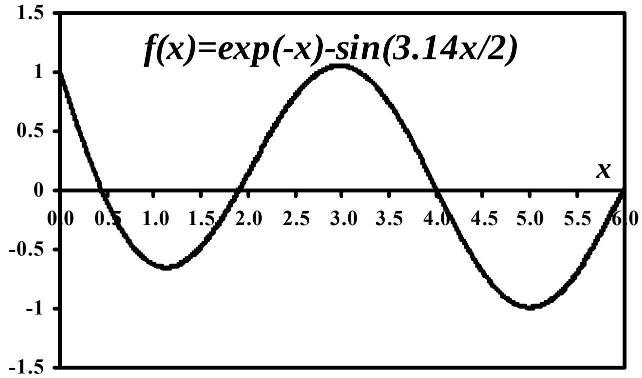
Bu fonksiyonların kökleri genelde iki değişik şekilde bulunabilir: 1) fonksiyonların gerçel köklerininin duyarlı grafik yöntemlerle bulunması, 2) fonksiyonların bütün köklerinin yani gerçel ve sanal köklerinin bulunması. İkinci yöntem birincisine göre biraz daha zor ve karmaşık bir yöntemdir. Bu bölümün ilk kısımlarında fonksiyonların köklerini hesaplarken kullanılabilecek çeşitli grafik yöntemleri anlatılacak, son kısımlarında ise gerçel ve sanal köklere sahip polinomların köklerinin bulunmasına yönelik çeşitli sayısal yöntemler verilecektir.

1.3. İKİYE BÖLME (BISECTION) YÖNTEMİ

Bu yöntemde kök değeri, kökün bulunacağı tahmin edilen aralığın 2' ye bölünmesi ile bulunmaya çalışılır. Fonksiyonun gerçek kök/köklere sahip olduğunu, süreklilik gösterdiğini kabul edelim.

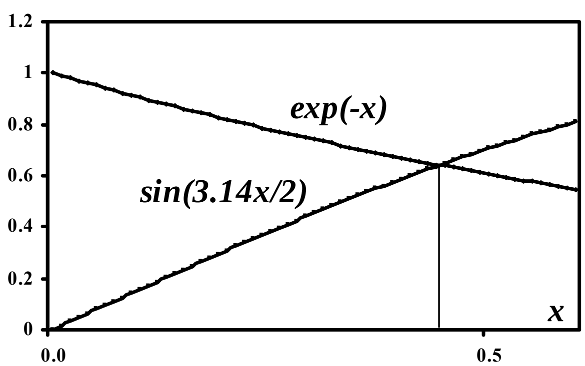
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} - \sin(\tfrac{\pi}{2}x) = 0 \qquad (1.3)$$

Denklem (1.3) deki $f(x)$ fonksiyonun x e göre değişimi grafiği Şekil 1.1 de verilmektedir. Şekle dikkat edilirse, $f(x)$ fonksiyonu yatay ekseni ilk olarak $0 \leq x \leq 1$ aralığında kesmektedir (yani 0.50 civarında bir kök vardır). Oysa bu fonksiyonu sıfır yapan birden fazla kök daima vardır. $f(x)$ fonksiyonundaki terimler ayrı ayrı incelenecek olursa, e^{-x} terimi 1 ile 0 aarasında değişirken, sinüslü terim -1 ile $+1$ arasında değerler almaktadır. x in çok büyük değerlerinde ($x \gg 1$) üstel terimin fonksiyondaki etkisi azalmakta ve sinüslü terimin etkisi ortaya çıkmaktadır. Bu fonksiyondaki terimlerin her birinin grafikleri Şekil 1.2 de gösterilmektedir.



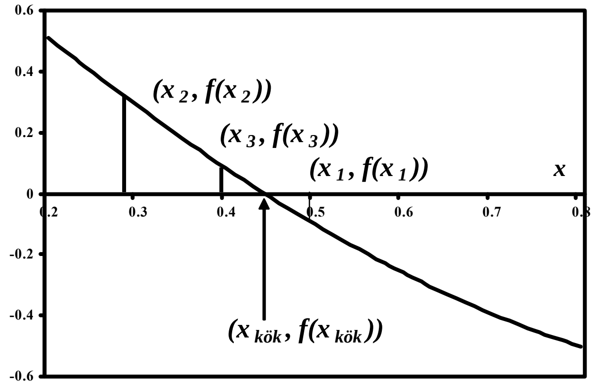
Şekil 1.1. $f(x) = e^{-x} - \sin(\frac{\pi}{2}x)$ fonksiyonunun grafiği.

Şekil 1.1 e göre $f(x)$ fonksiyonun (ilk) kökü $[0, 1]$ aralığında aranmalıdır. Bu aralığı $[A,\, B]$ şeklinde ifade edelim ($A = 0$ ve $B = 1$). Bu aralıktaki kök için ilk başlangıç değerinin aralığın 2'*ye bölünmesi* ile elde edileceğini belirtmiştik: $x = \frac{A+B}{2} = x_1 = \frac{0+1}{2} = 0.5$ (Şekil 1.3).



Şekil 1.2. e^{-x} ve $\sin(\frac{\pi}{2}x)$ terimlerinin grafiği.

$f(x_1 = 0.5)$=e$^{-0.5} -$ sin$(\frac{\pi}{2}0.5) = -0.1006$ dir. Bulunan değerin hata kriterinden küçük olup olmadığı kontrol edilir. $|f(x_1 = 0.5) = -0.1006|$ hata kriterinden küçük ise bu kök değeri olarak kabul edilebilir, değilse yeni kök değeri aranmalıdır (Şekil 1.3 teki x_2, x_3, ...). Bu arama işlemi için kök değerinin hesaplanacağı yeni A ve B değerlerinin belirlediği aralıkta yapılır.



Şekil 1.3. İkiye bölme yöntemi (alt indisler sıra numarasını göstermektedir).

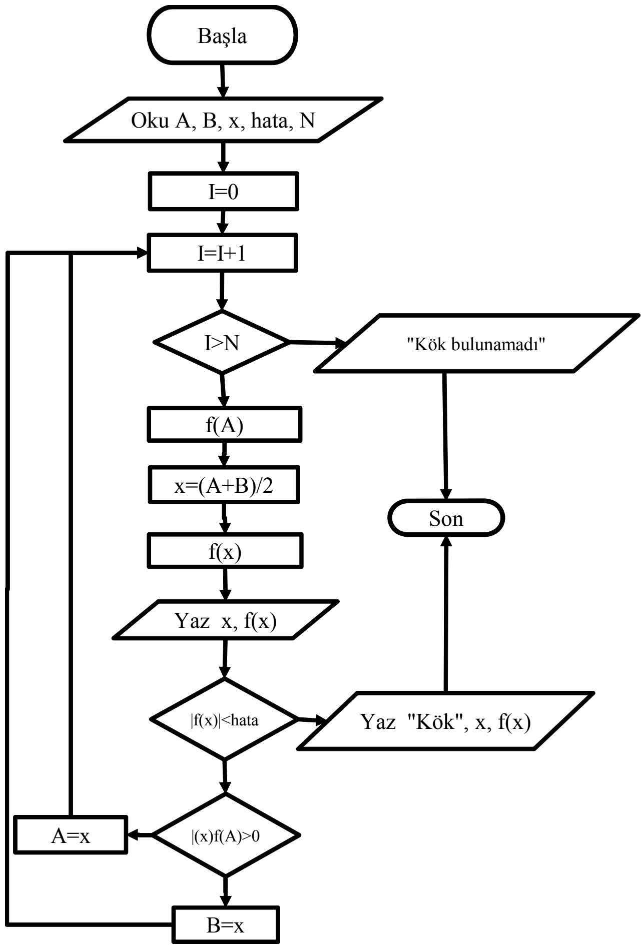
Yeni aralık için $f(x_1) \cdot f(A)$ (veya $f(x_1) \cdot f(B)$) çarpımının işaretine bakılır. Burada $f(x_1 = 0.5) \cdot f(A = 0)$ çarpımından elde edilen sayının işareti negatiftir (yani fonksiyonlar $f(x_1 = 0.5)$<0, $f(A = 0)$>0). Öyleyse yeni sınır değerleri için A sabit kalmalı ve $B = x_1$ alınmalıdır. Yani aralık bir tarafından köke doğru daraltılacaktır. Artık $f(x_2)$ fonksiyonunun kökü bu yeni [A, B] bölgesindedir. Yeni aralıktaki $x_2 = \frac{A+B}{2}$ den hesaplanır. Bu işlem, yani ikiye bölme yöntemi, belirtilen duyarlığa kadar devam ettirilir.

Şekil 1.3 teki grafikteki harflerin numaralı alt indisleri işlem sırasını göstermektedir. x_1 ilk değeri, x_2 ikinci değeri ve x_3 üçüncü tahmini kök değerini göstermektedir. İşlemler $|x_1 - x_2|$, $\frac{|x_1-x_2|}{2}$, $|\frac{x_1-x_2}{x_1}|$ ifadelerinden elde edilecek bir değerin istenilen kriterin altına düşünceye kadar devam ettirilir. eğer elde edilinceye veya belirlenen bir işlem sayısına (`N`) kadar devam ettirilir. İkiye bölme yöntemi ile fonksiyonların köklerinin bulunması işlemlerinin sırası Algoritma 1.1 de verilmektedir

Algoritma 1.1 İkiye bölme yöntemi.

```
 1. Başla
 2. Oku A, B, HATA, N
 3. I=0
 4. I=I+1
 5. Eğer I > N İse Git 18
 6. f(A) yı hesaplayınız,
 7. x=(A+B)/2.
 8. f(x) i hesaplayınız,
 9. Yaz x, f(x), A, B
10. Eğer |f(x)| < HATA İse Git 16
11. Eğer f(A)*f(x) > 0 İse Git 14
12. B=x
13. Git 4
14. A=x
15. Git 4
16. Yaz "Kök=" x
17. Git 19
18. Yaz I, "işlem sonunda kök bulunamadı"
19. Son
```

Yukarıdaki algoritmadaki `f(x)` fonksiyonu, `N` işlem sayısını, `i` sayaçı, `A` ve `B` sınır değerlerini, `HATA` işlemleri durdurma kriterini saklayan değişkenlerdir. Ayrıca Şekil 1.4 de ikiye bölme işleminin akış diyagramı verilmektedir. Bu algoritma veya akış diyagramından yararlanılarak ikiye bölme yöntemi bir bilgisayar programlama dilinde de yazılabilir.



Şekil 1.4. İkiye bölme yönteminin akış diyagramı.

Örnek 1.1. $f(x) = e^{-x} - \sin(\frac{\pi}{2}x)$ fonksiyonunu sıfır yapan x değerinin ikiye bölme yöntemine göre bulunuz.

Daha önce bu fonksiyonun ikiye bölme yöntemine göre çözümü ile ilgili bilgiler verilmişti. Aşağıdaki çizelge işlemlerin özetini vermektedir.

Çizelge 1.1 İkiye bölme yöntemiyle elde edilen sonuçlar.

adım	A	B	x_i	e^{-x}	$\sin(\pi x/2)$	$f(x)$	$f(x)f(A)$
1	0.00	1.00	0.50	0.6065	0.7071	-0.1006	$negatif$
2	0.00	0.50	0.25	0.7788	0.3827	$+0.3961$	$pozitif$
3	0.25	0.50	0.375	0.6873	0.5556	$+0.1317$	$pozitif$
4	0.375	0.50	0.4375	0.6456	0.6344	$+0.0112$	$pozitif$
5	0.4375	0.50	0.46875	0.6258	0.6716	-0.0458	$negatif$
.	0.4375	0.4687	.	.	.	.	.

Birinci adımda çözüm aralığı, ilk tahmini kök değeri, fonsiyonun terimleri ve $f(x)\cdot f(A)$ çarpımının sonuçları verilmektedir. Çarpım sonucu elde edilen değer negatif işaretlidir. Bu kökün aranacağı aralığın B tarafından daraltılması gerektiğini göstermektedir. Çünkü $f(x)$ negatif iken $f(\text{A})$ nın pozitif, $f(B=x)$ nin ise negatif olmasını gerekmektedir ki $f(x)$ fonksiyonunun belirtilen yeni aralıkta yatay ekseni kesmesi sağlanabilsin. 2, 3 ve 4ncü adımlarda $f(x)\cdot f(A)$ çarpımının sonucu pozitif işaretli değer olmakta ve kökün aranacağı sınır sol tarafından yani A değeri değiştirilerek daraltılması gerekmektedir. Beşinci adımda $f(x)\cdot f(A)$ çarpımının sonucu negatif olmakta ve sınır değeri B tarafından daraltılmaktadır. Her adımda $f(x)$ nin mutlak değerine dikkat edilerek işlemin ne zaman kesileceği sürekli kontrol edilmelidir.