5. SAYISAL İNTEGRASYON

Bu kısımda sayısal integral alma yöntemlerinden bazıları anlatılacaktır. İntegral kısaca, bir eğrinin veya fonksiyonun altında kalan alan olarak tanımlanabilir (Şekil 5.1 deki $y = f(x)$ fonksiyonunun altında kalan taralı alan). Bir ağaç yaprağının alanını hesaplamak için milimetrik kağıt üzerine yaprak konulur ve yaprağın kenarlarından kalemle geçilerek şekli çizilir. İşaretlenen bölgenin içinde kalan milimetrik kağıt üzerindeki mm bölmelerini toplanarak ağaç yaprağının alanı yani yaprağın kenar şeklinin fonksiyonun integrali hesaplanır. Uygulamada sayısal integrasyona başvurulmasının nedenlerinden biri de bazı integrallerin sınır değerleri arasında alınmasının zor olması veya çok uzun sürmesidir. Bu bölümde görülecek sayısal integral yöntemlerinde, integrallerin sınır değerleri arasında tanımlı olduğu, fonksiyonların sürekli olduğu kabul edilecektir.

$$\int_0^x \sqrt{ax^2+b}\,x^2dx$$

$$= \frac{x}{4a}(ax^2+b)^{3/2} - \frac{bx}{8a}\sqrt{ax^2+b} - \frac{b^2}{8a\sqrt{a}}ln(x\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+b})\ a \geq 0$$

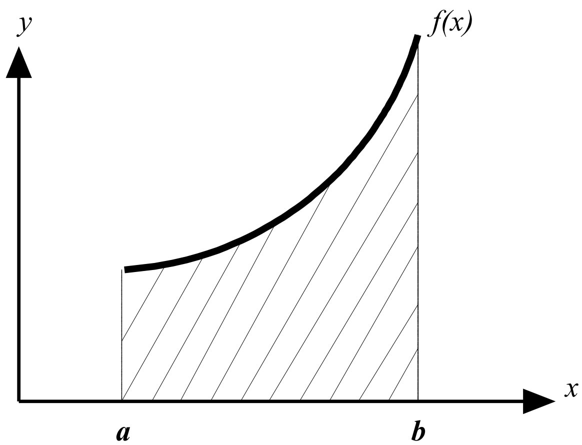
$$= \frac{x}{4a}(ax^2+b)^{3/2} - \frac{bx}{8a}\sqrt{ax^2+b} - \frac{b^2}{8a\sqrt{-a}}sin^{-1}(x\sqrt{\tfrac{-a}{b}})\ \ a < 0 \qquad (5.1)$$

İntegralinde a sabitinin farklı iki değeri için karşımıza iki değişik sonuç çıkmaktadır. Bu tür integralleri hesaplamak analitik olarak zordur. Eğer çok fazla sayıdaki a ve b değerleri için $[0,\ x]$ sınır değerleri arasında bu integral hesaplanacaksa, sayısal integrasyon yapmak, zaman açısından daha uygundur.

Sınır değerleri belli olan bir integrali

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (5.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $f(x)$ fonksiyonu, $[a,\, b]$ sınır değerleri arasında tanımlı bir fonksiyondur.

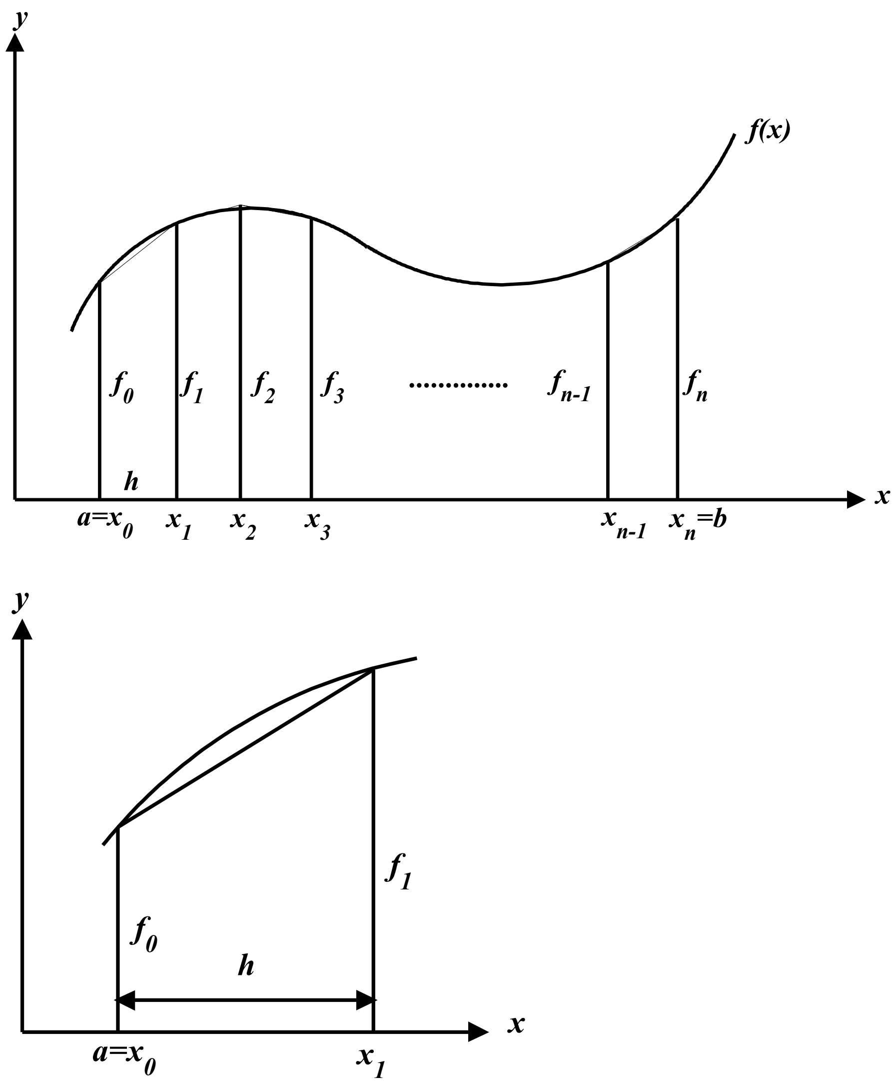


Şekil 5.1. $\int_a^b f(x)dx$ şeklinde, sınır değerleri belirli integralin gösterimi.

5.1. 1nci DERECE SİMPSON (YAMUK) YÖNTEMİ

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad (5.3)$$

Bu integraldeki $f(x)$ fonksiyonunun, $[a, b]$ aralığında tanımlı olduğunu ve alt ve üst sınırlarının ($[a,b]$) aralığını Şekil 5.2 de görüldüğü gibi n tane $h = dx$ genişliğinde parçalara bölünmüştür.



Şekil 5.2 Yamuk yöntemi ve bir bölmesi.

Şekil 5.2 nin sol tarafındaki grafikte h genişliğindeki bölmelerde $f(x)$ in değişiminin çizgisel olduğu kabul edilmektedir. Başka bir deyişle Şekil 5.2 nin sağ tarafında yüksekliği h olan bir yamuğun alanı, birbirine paralel kenarların toplamının bu kenarlara dik kenar h nin çarpımının ikiye bölünmesi ile elde edilir: $h \times (y_0 + y_1)/2$. $f(x)$ fonksiyonu h aralıklarında çizgisel (birinci dereceden polinom-$p(x) = a_0 + a_1 x$) olarak değiştiği kabul edilmektedir. Şimdi bunu bir $f(x)$ fonksiyonunun altında kalan alanı yaklaşık olarak hesaplamak için kullanılırsa, yamuk alanlarının toplamı $f(x)$ fonksiyonun $[a, b]$ aralığındaki integraline eşit olur:

$$I = \int_a^b f(x)dx \sim I_h(\text{yamuk alanlarının toplamı})$$

$$I_h \sim \tfrac{h}{2}(f_0 + f_1) + \tfrac{h}{2}(f_1 + f_2) + ... + \tfrac{h}{2}(f_{n-2} + f_{n-1}) + \tfrac{h}{2}(f_{n-1} + f_n)$$

$$= \tfrac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + ... + 2f_{n-1} + f_n)$$

$$= \tfrac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad (5.4)$$

denklemdeki $h = (b-a)/n$ şeklindedir. Denklemdeki n bölme veya veri sayısıdır.

Örnek 5.1. Bir hastanın kanındaki ilaç miktarı yoğunluğu ($\frac{\text{mgr}}{\text{Litre}}$) zamana bağlı olarak ölçülmüş ve değerleri aşağıdaki çizelgedeki gibi verilmektedir. Bu verilere göre 22 saniye sonunda damarlardaki ilacın toplam miktarını, 1nci derece Simpson/yamuk yöntemine göre hesaplayınız. Ayrıca kalbin dakikada, vücuda pompaladığı kanı $R = D \times \int_0^{22} f(t)\,dt$ denkleminden hesaplayınız ($D = 0.158\ \frac{\text{Litre}^2}{\text{mgr dak.}}$).

Enjeksiyon zamanı	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Yoğunluk ($\frac{\text{mgr}}{\text{Litre}}$)	0	0	0.6	1.4	2.7	3.7	4.1	3.8	2.9	1.5	0.9	0.5

Yukarıdaki verilere göre $a = 0$, $b = 22$ ve $\Delta t = h = \frac{b-a}{n} = \frac{(22-0)}{11} = 2$ s olarak alınır ($n = 11$ tane ölçüm aralığı vardır). 22nci saniye sonunda damarlardaki toplam ilaç miktarı yani integral,

$I_h = \frac{h}{2}[f(t_0) + 2f(t_1) + 2f(t_2) + 2f(t_3) + ... + 2f(t_{n-1}) + f(t_n)]$

denkleminden $I_h = \frac{2}{2}[0 + 2\times 0 + 2\times 0.6 + ... + 2\times 0.9 + 0.5] = 43.7\ \frac{\text{mgr}}{\text{Litre}}$

şeklinde yaklaşık olarak hesaplanabilir.

$R = 0.158\ \frac{\text{Litre}^2}{\text{mgr dak.}}\ 43.7\ \frac{\text{mgr}}{\text{Litre}} = 0.158\ \frac{\text{Litre}^2}{\text{mgr dak.}}\ 43.7\ \frac{\text{mgr}}{\text{Litre}} = 6.9 \frac{\text{Litre}}{\text{dak.}}$ dır.

Örnek 5.2. $I = \int_0^1 x^2 dx$ integralini 1nci derece Simpson yöntemini kullanarak $h = 0.25$ ve $h = 0.1$ değerleri için hesaplayınız.

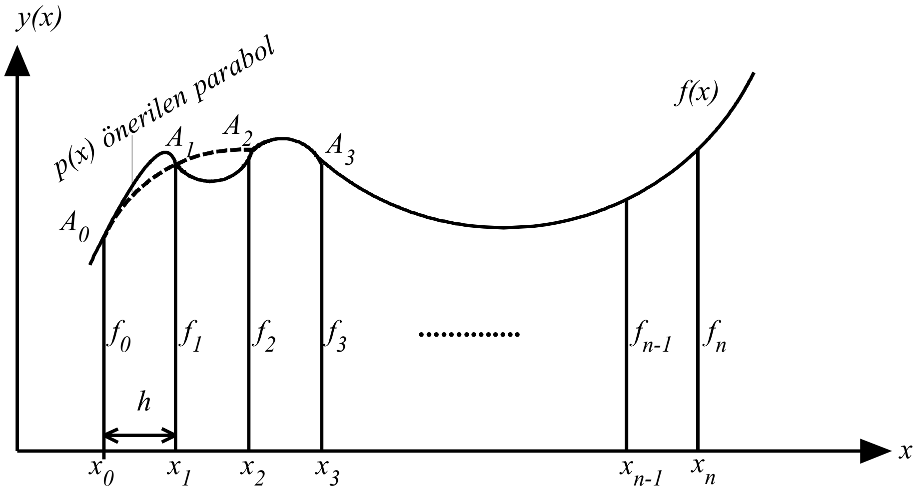
$$I_{0.25} = \frac{0.25}{2}(0.0 + 2\times(0.25)^2 + 2\times(0.50)^2 + 2\times(0.75)^2 + 1.0) = 0.3458$$

$$I_{0.1} = \frac{0.1}{2}(0.0 + 2\times(0.1)^2 + 2\times(0.2)^2 + ... + 2\times(0.9)^2 + 1) = 0.3350$$

Şeklinde değerleri bulunur. Örnekte verilen integralin analitik çözümden ($I = \frac{1}{3}x^3|_0^1$) elde edilen sonuç ise $I = 0.333...$ tür. h değeri uygun bir değer seçilerek integralin sonucu yaklaşık olarak hesaplanabilir. Yamuk yöntemiyle hesaplanan integralde yapılan hata $M\frac{(b-a)^3}{(12n^2)} = M(b-a)(\frac{b-a}{n})^2 = M(b-a)(h)^2 =$ mertebesindedir. M fonksiyonun ikinci türevinde $a \le x \le b$ aralığında alabileceği maksimum değer, n ise $a \le x \le b$ aralığının bölünme sayısıdır. Buna karşın bölme sayısını çok fazla artırmak yuvarlama hatalarına neden olmakta ve sonuçların doğruluğunu etkilemektedir (onluk sayı sistemi ile ikili sayı sistemleri arasındaki dönüşümleri hatırlayınız).

5.2. 2.DERECE SIMPSON YÖNTEMİ

Şekil 5.4 den görüldüğü gibi $A_0A_1A_2$, $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$,... noktalarından geçen parabolleri göz önünde bulunduralım. Yamuk yönteminde bu noktaları birleştiren fonksiyon çizgisel olarak seçilmişti. Şekilde, $A_0A_1A_2$ noktalarından geçen bir parabol dikkate alınmıştır. Bu parabolün denklemi $f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklinde verilmiş olsun. h bölmeleri arasında önerilen $f(x)$ fonksiyonu, y gerçek fonksiyonuna ne kadar yakın ise Simpson yöntemi ile elde edilen sayısal integral sonuçları da o kadar kesin olacaktır. Önerilen $f(x)$ fonksiyonu ile elde edilen eğrilerin altında kalan alanların toplanması ile integrali yaklaşık olarak hesaplamış oluruz. Bu yöntem için uygun bir denklem elde edebilmek için önce $A_0A_1A_2$ noktalarından geçen fonksiyonu $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolü şeklinde seçelim. Bu parabolün altındaki alan veya parabolün integrali,



Şekil 5.4. Simpson yöntemine göre integral hesabı.

$$A \simeq \int_{x_1-h}^{x_1+h} f(x)dx = \int_{x_1-h}^{x_1+h} (ax^2+bx+c)dx = [\tfrac{ax^3}{3} + \tfrac{bx^2}{2} + cx]_{x_1-h}^{x_1+h} \tag{5.5}$$

$$= \tfrac{a}{3}[(x_1+h)^3 - (x_1-h)^3] + \tfrac{b}{2}[(x_1+h)^2 - (x_1-h)^2] + c[(x_1+h) - (x_1-h)]$$

$$= \tfrac{a}{3}[(x_1^3 + h^3 + 3\,x_1^2h + 3\,x_1\,h^2) - (x_1^3 - h^3 - 3x_1^2h + 3x_1h^2] +$$

$$\tfrac{b}{2}[(x_1^2 + h^2 + 2x_1h) - \ (x_1^2 + h^2 - 2x_1h)] + c[(x_1+h) - (x_1-h)]$$

$$= \tfrac{a}{3}[(2h^3 + 6\,x_1^2h] + \tfrac{b}{2}[(4x_1h)] + c[2h]$$

$$= \tfrac{h}{3}[a(6x_1^2 + 2h^2) + 6bx_1 + 6c] \tag{5.6}$$

şeklindedir. Bu sonuçları yeniden düzenlersek, $A_0A_1A_2$ noktalarından geçen eğrinin altındaki alan,

$$A = \tfrac{h}{3}[a(x_1+h)^2 + b(x_1+h) + c + 4(ax_1^2 + bx_1 + c) + a(x_1-h)^2 + b(x_1-h) + c$$

$$= \tfrac{h}{3}[f(x_1+h) + 4f(x_1) + f(x_1-h)] \tag{5.7}$$

şeklinde olur. İşlem diğer noktalara genişletilecek olursa I_h integrali aşağıdaki gibi olur:

$$I_h = \tfrac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \tfrac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + ... + \tfrac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \tag{5.8a}$$

$$I_h = \tfrac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + ... + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \tag{5.8b}$$

yukarıdaki (5.8) denklemlerinde $h=(b-a)/n$ olarak alınmaktadır. Denklem (5.8) Simpson yöntemi olarak bilinir. İntegralin alt ve üst sınırları arasını bir çift sayıya bölerek bu yöntemi kullanabiliriz. Yukarıda anlatılan yamuk ve Simpson yöntemlerini genelleştirecek olursak, aşağıdaki denklemleri sayısal integral hesaplamalarında kullanabiliriz:

1) $\frac{h}{2}(y_1+2y_2+2y_3+...+y_n)$ birinci derece Simpson veya Yamuk yöntemi

2) $\frac{h}{3}(y_1+4y_2+2y_3+4y_4+...+y_n)$ ikinci derece Simpson yöntemi

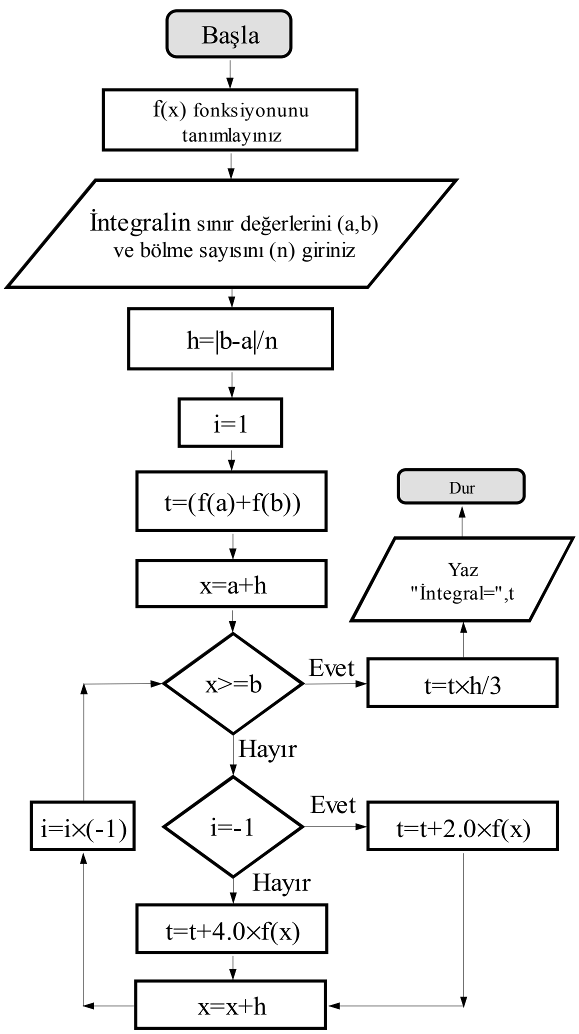
3) $\frac{3h}{8}(y_1+3y_2+3y_3+3y_4+...+y_n)$ (üçüncü derece Simpson yöntemi)

4) $\frac{2h}{45}(7y_1+32y_2+12y_3+32y_4+7y_5)$ (dördüncü derece Simpson yöntemi)

5) $\frac{5h}{288}(19y_1+75y_2+50y_3+50y_4+75y_5+19y_6)$ (beşinci derece Simpson yöntemi)

Simpson yöntemiyle yapılan hata, $M(b-a)^5/(2880n^4)$ mertebesindedir. M değeri, fonksiyonun dördüncü türevinde, $a\leq x\leq b$ aralığında alabileceği maksimum değer, n ise $a\leq x\leq b$ aralığının bölünme sayısıdır.

Aşağıdaki şekilde Simpson yönteminin akış diyagramı verilmektedir. Akış diyagramındaki i=1 ataması ve daha sonraki adımlardaki i=i × (-1) çarpımı, integral alınmasında $f(x)$ fonsiyonunun sırayla 4 veya 2 sayıları ile çarpılmasını sağlamaktadır.



Şekil 5.5. İkinci derece Simpson yöntemine göre integral hesabının akış diyagramı.

5.4. ORTA-NOKTA YÖNTEMİ

Bu yönteme göre $[a,b]$ aralığında tanımlı olarak verilen bir $f(x)$ fonksiyonunun integralini hesaplamak için, integralin alınacağı aralık önce n (çift sayı) parçaya bölünür $(h=(b-a)/n)$. Sayısal integrasyona başlama noktası olarak, a noktası ile $a+h$ noktalarının ortasındaki (ara) değerini alınır. Böylelikle ilk değer bulunmuş olur. Yani $x_0=(a+a+h)/2$ şeklinde bir değer bulunur. Bu şekilde herhangi bir $f(x)$ fonksiyonun $[a,b]$ aralığındaki integrali,

$$I=\int_a^b f(x)dx \sim I_h = h(f(x_0)+f(x_1)+.......+f(x_n)) \tag{5.14}$$

şeklinde verilmektedir. Denklem (5.14) deki $x_0,$ a ile $a+h$ arasında bir değerdir. Orta nokta yönteminde yapılan hata, $M(b-a)^3/(24n^2)$ mertebesindedir. M fonksiyonun ikinci türevinde $a\leq x\leq b$ aralığında alabileceği maksimum değer, n ise $a\leq x\leq b$ aralığının bölünme sayısıdır. Bu yöntemle ilgili olarak aşağıda bir örnek verilmektedir.

Örnek 5.6. $I=\int_0^2 \frac{1}{1+e^x}dx$ integralini orta nokta yöntemine göre ve $n=4$ için hesaplayınız.

$h=(2-0)/4=0.5$

$I_h=0.5(\frac{1}{1+e^{0.25}}+\frac{1}{1+e^{0.75}}+\frac{1}{1+e^{1.25}}+\frac{1}{1+e^{1.75}})=0.545$

sonucu bulunur.

5.5. Aşağıdaki verilere göre yamuk ve Simpson yöntemini uygulayarak integral değerlerini elde ediniz (verilerden fonksiyonu anlayabildiniz mi?).

x	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
$f(x)$	1.0000	1.0513	1.1052	1.1618	1.2214	1.2840	1.3499	1.4191	1.4918

5.6. Bir fizikçi aşağıdaki verileri bir deneyden elde etmiştir. x e bağlı olarak değişen y fonksiyonunun bilinmemesine rağmen, y eğrisinin altında kalan alanı yamuk ve Simpson yöntemlerini uygulayarak hesaplayınız.

x	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	1.21	1.47	1.82	2.01	2.17	2.25	2.51	2.98	3.14