şeklinde verilmektedir. Denklem (5.14) deki $x_0,$ a ile $a+h$ arasında bir değerdir. Orta nokta yönteminde yapılan hata, $M(b-a)^3/(24n^2)$ mertebesindedir. M fonksiyonun ikinci türevinde $a \le x \le b$ aralığında alabileceği maksimum değer, n ise $a \le x \le b$ aralığının bölünme sayısıdır. Bu yöntemle ilgili olarak aşağıda bir örnek verilmektedir.

Örnek 5.6. $I = \int\limits_0^2 \frac{1}{1+e^x} dx$ integralini orta nokta yöntemine göre ve $n = 4$ için hesaplayınız.

$h = (2-0)/4 = 0.5$

$I_h = 0.5(\frac{1}{1+e^{0.25}} + \frac{1}{1+e^{0.75}} + \frac{1}{1+e^{1.25}} + \frac{1}{1+e^{1.75}}) = 0.545$

5.5. GAUSSIAN-QUADRATURE YÖNTEMi

Bu kesimde $[a,b]$ aralığında tanımlı olan bir $f(x)$ fonksiyonun Gaussian-quadrature yöntemine göre integralini hesaplamaya çalışacağız. $(-1,1)$ aralığında tanımlı olan herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun bu aralıktaki integralini:

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx \tag{5.15}$$

olarak yazalım. Yukarıdaki (5.12) denklemini toplam şeklinde,

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + ... + w_n f(x_n) = \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k) \tag{5.16}$$

yazabiliriz. Denklemdeki $w_0,$ w_1,...,w_n fonksiyonları ağırlık fonksiyonu veya x e bağlı bir fonksiyon ya da sabit olabilirdi. x_0, x_1,......,x_n değerleri fonksiyonun tanımlı olduğu noktalar olsun. Yukarıdaki denklemde $2n+2$ tane değeri yani n+1 tane w_k ve n+1 tane x_k yı belirleyebilirsek $f(x)$ in integralini hesaplayabiliriz. Burada $f(x)$ in derecesi 2n+1 den küçük olmalıdır.

Çizelge 5.1. Gaussian-quadrature yöntemi için ağırlık sabitleri w_k ve Legendre polinomlarının kök değerleri olan x_k değerleri.

n	w_k	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	$w_0 = 0.556; w_1 = 0.889$	-0.774	0	0.774			
3	$w_2 = 0.347; w_3 = 0.652$	-0.861	-0.339	0.339	0.861		
4	$w_4 = 0.236; w_5 = 0.478; w_6 = 0.568$	-0.906	-0.538	0	0.538	0.906	
5	$w_7 = 0.171; w_8 = 0.360; w_8 = 0.467;$	-0.932	-0.661	-0.238	0.238	0.661	0.932

Örnek 5.7. $I = \int\limits_{-1}^{1} x^2 cos(x)\, dx$ integralini Gaussian-quadrature yöntemine göre $n = 2$ ikinci dereceden polinom seçerek hesaplayınız.

İntegral denkleminde $f(x) = x^2 cos(x)$ şeklindedir. İntegralde yaklaşık olarak ikinci dereceden polinom seçildiği için

$I = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$

şeklinde olacaktır. Ağırlık sabitleri ise $w_0 = 0.556,$ $w_1 = 0.889,$ $w_2 = 0.556,$ kökler ise polinom ikinci dereceden olduğu için $x_0 = -0.774,$ $x_1 = 0,$ $x_2 = 0.774$ olacaktır. Bu durumda integral değeri

$I = w_0(x_0^2 cosx_0) + w_1(x_1^2 cosx_1) + w_2(x_2^2 cosx_2)$

yani

$I = \frac{5}{9}((-0.774)^2 cos(-0.774)) + \frac{8}{9}((0)^2 cos)0)) + \frac{5}{9}((0.774)^2 cos(0.774))$

$= 0.4765$

olarak elde edilecektir. İntegralin analitik çözümünden elde edilen sonuç ise,

$I = \int_{-1}^{1} x^2 cos(x)\, dx \ = [2xcosx + (x^2-2)sinx]_{-1}^{1} = 0.47830$

şeklindedir. Sonuçlardan görüldüğü gibi büyük bir doğrulukla integral değeri hesaplanabilmektedir.