4. İNTERPOLASYON ve FİT

Fizik, kimya, biyoloji gibi herhangi bir uygulamalı bilim dalında yapılan deney veya bir mühendislik çalışmasından elde edilen veriler tamamen doğru sonuçları temsil etmezler. Elde edilen veya ölçülen verilerin herbiri üzerinde kullanılan deneysel aletten, ortamdan, ölçüm yapan kişiden, rakamların yuvarlama veya kesme işleminden kaynaklanan birçok hatanın bileşeni vardır. Toplanan verilerin hatalarını bilmek, verileri doğru kullanmak ve tanımlamak, ara değerleri olmayan verileri bulmak için bir formülün elde edilmesi gerekmektedir. Bu matematiksel formül sistemin davranışını temsil edebilecek bir fonksiyon olmalıdır. Yani deneysel verileri temsil edebilecek en uygun eğri veya fonksiyon bulunmuş olur. Yapılan bu işlemle deneysel veriler üzerindeki hatalar ortaya çıkartılmış olur. Veriler arasındaki değerleri temsil edebilecek en uygun eğri veya fonksiyonun bulunması problemine *interpolasyon*, verileri temsil edebilecek en uygun eğri veya fonksiyonun bulunması problemine *fit* adı verilir.

Latince de interpolate değiştirmek, daha iyi duruma getirmek anlamına gelir (bir metni değiştirmek veya arasına kelimeler eklemek). İnrepolasyon iki nesne arasına birşey koymak veya bilinen iki değerin arasındaki başka bir değerin bulunması şeklinde tanımlanabilir. İngilizceye 17nci yüzyılda girmiş ve günümüzde çok geniş anlamda kullanılmaktadır.

Veriler için en uygun yaklaşım eğrisi yada fonksiyonu $f(x)$ ile gösterelim. Bu yaklaşım fonksiyonu n nci dereceden bir polinom, bir Fourier fonksiyonu, bir üstel fonksiyon ise,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \tag{4.1}$$

veya bu bir Fourier fonksiyonu ise,

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1cos(x) + a_2cos(2x) + ... + a_ncos(nx) + b_1sin(x) \\ &\quad + b_2sin(2x) + \qquad ..... + b_nsin(nx) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_kcos(kx) + \ + \sum_{k=1}^{n} b_ksin(kx) \end{aligned} \tag{4.2}$$

veya bu bir üstel fonksiyon ise,

$$f(x) = a_0e^{b_0x} + a_1e^{b_1x} + ...a_ne^{b_nx} = \sum_{i=0}^{n} a_ie^{b_ix} \tag{4.3}$$

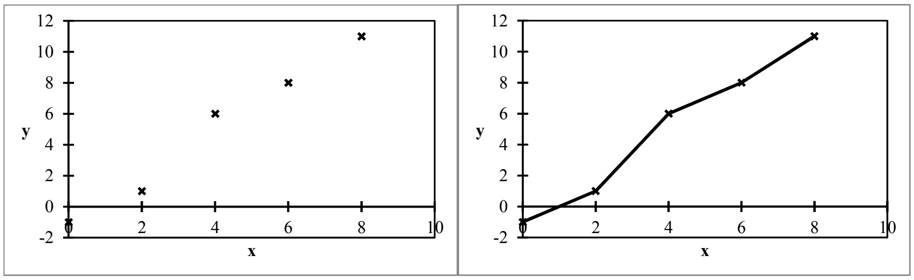
şeklinde verilebilir. Yukarıdaki $f(x)$ fonksiyonlarından hangisinin seçileceğine elde edilen verilere bakarak karar verilir.

4.1. ÇİZGİSEL İNTERPOLASYON

Çizgisel interpolasyona bir örnekle başlayalım. Çizelge 4.1 de, eşit x aralıklarında, x e bağlı y değerleri verilmiştir. k değerleri veri sırasını göstermektedir. Bu verilerden yararlanarak, x in ara bir değeri için y nin alabileceği değer interpolasyon yapılarak hesaplanabilir. $x = 6.3$ de y yi hesaplamak için uygun $f(x)$ fonksiyonu bulunabilir. Bunun için veriler arasını *çizgisel interpolasyon* la birleştirebiliriz. Şekil 4.1, Çizelge 4.1 deki veriler arasının çizgilerle birleştirilmesi sonucunda elde edilen grafik verilmektedir (doğrusal bir çizgi verilere uydurulmuştur). Grafikten $f(x)$ fonksiyonun çizgisel bir değişim gösterdiği görülmektedir.

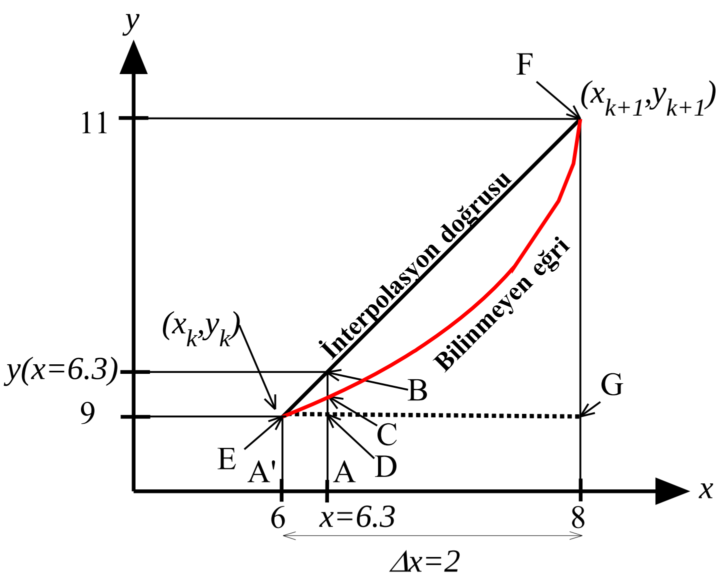
Çizelge 4.1. Eşit aralıklarla elde edilmiş (deneysel) veriler.

k	0	1	2	3	4
x_k	0	2	4	6	8
y_k	-1	1	6	9	11



Şekil 4.1 Çizgisel bağlı veriler.

$x = 6$ ile $x = 8$ değerleri arasındaki bir değeri bulabilmek için Şekil 4.2 deki benzer BDE ve EFG üçgenlerinden yararlanılabilir.



Şekil 4.2 Verilerin çizgisel interpolasyon.

Benzer üçgenlerin kenarlarının oranlarından aşağıdakiler yazılabilir:

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k} = \frac{\frac{1}{2}(y-y_k)}{x-x_k} = \frac{\text{BC}}{\text{A'A}} \tag{4.4a}$$

$$(y_{k+1}-y_k)\,\frac{\text{A'A}}{2(\Delta x)} = (y-y_k) \tag{4.4b}$$

$$y = \text{AC} = y_k + \frac{1}{2}\frac{\text{A'A}}{\Delta x}(y_{k+1}-y_k) \tag{4.4c}$$

$$y = y_k + \frac{1}{2}r(y_{k+1}-y_k) \tag{4.4d}$$

denklemi kullanabilir. Denklemlerdeki k veri sıra numarasını gösteren bir tam sayı, $\frac{1}{2}$ terimi, BD doğru parçasının yarısının alındığını göstermekte, A'A $= x - x_k$ yı, Δx veri aralığını, $r = A'A/\Delta x$ oranını göstermektedir. İnterpolasyon sonucunda yapılan hata ise $CD = AD - AC$ kadardır. Algoritma 4.1 ve

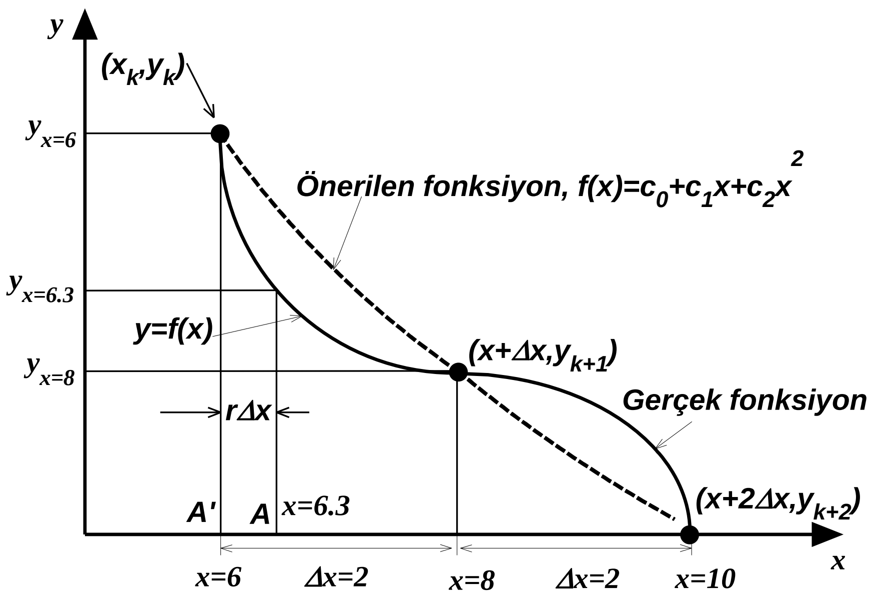
Program 4.1 de çizgisel interpolasyonla ilgili olarak algoritma ve FORTRAN programının kaynak kodu verilmiştir.

Algoritma 4.1 Çizgisel interpolasyon yönteminin algoritması.

```
1. Başla
2. x(k), y(k), x(k+1), y(k+1) değerlerinin giriniz,
3. x değerini giriniz,
4. r=(x-x(k))/(x(k+1)-x(k)),
5. y=y(k)+r*(y(k+1)-y(k)),
6. y değişkenindeki değeri yaz,
7. Son
```

4.2. POLİNOMİYAL İNTERPOLASYON

Bazen elde edilen veriler çizgisellik göstermeyebilir. Bu durumda verilere en uygun fonksiyon polinom şeklinde seçilebilir. Bu fonksiyon, ikinci dereceden bir polinom olabilir. Şekil 4.3. de içi dolu daire ile gösterilen veri noktalarını birleştirmek için önerilen fonksiyon (interpolasyon fonksiyonu) kesikli çizgilerle gösterilmektedir (oysa veriler arasındaki gerçek fonksiyon başka şekilde olabilir).



Şekil 4.3 İkinci dereceden polinomla verilerin interpolasyonu.

Polinomiyal interpolasyonda ardışık verilerden üç tanesi seçilir, yani *(x_k, y_k)*, *($x_k + \Delta x$, y_{k+1})* ve *($x_k + 2\Delta x$, y_{k+2})* gibi noktalar dikkate alınır (Şekil 4.3). Bu veri noktalarını birleştiren fonksiyon ikinci dereceden bir polinom

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{4.7}$$

şeklinde olabilir. Önerilen $f(x)$ polinomunun yukarıda belirtilen üç veri noktasından geçtiği kabul edilirse denklem (4.7) deki a_0, a_1 ve a_2 katsayılarının hesaplanması gerekmektedir. Bunun için aşağıdaki ifadeler yazılabilir,

$$f(x_k) = a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 \tag{4.8a}$$

$$f(x_{k+1}) = a_0 + a_1(x_k + \Delta x) + a_2(x_k + \Delta x)^2 \tag{4.8b}$$

$$f(x_{k+2}) = a_0 + a_1(x_k + 2\Delta x) + a_2(x_k + 2\Delta x)^2 \tag{4.8c}$$

ve bu denklemler a_0, a_1 ve a_2 katsayıları için çözülürse,

$$a_0 = \frac{y_{k+2}x_k}{2(\Delta x)^2}(x_k + \Delta x) - \frac{y_{k+1}x_k}{(\Delta x)^2}(x_k + 2\Delta x) + \frac{2y_k(x_k^2 + 2(\Delta x)x_k + 2(\Delta x)^2)}{2(\Delta x)^2} \tag{4.9a}$$

$$a_1 = \frac{-y_{k+2}(2x_k + \Delta x) + 4y_{k+1}(x_k + \Delta x) - (2x_k + 3\Delta x)y_k}{2(\Delta x)^2} \tag{4.9b}$$

$$a_2 = \frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k}{2(\Delta x)^2} \tag{4.9c}$$

elde edilir. Bu 3 veri noktası arasındaki değerler denklem (4.7) kullanılarak hesaplanabilir.

$$AB = f(x_k + r\Delta x \ + [r(r-1)/2](\Delta x)^2) \tag{4.10}$$

Örnek 4.1 Extrapolasyon işlemini aşağıdaki çizelgedeki değerlerin dışında kalan $x = 32°$ değeri için uygulayınız.

x(derece)	sin(x)
20°	0.34202
25°	0.42262
30°	0.50000

Yukarıdaki verilerin kullanılmasıyla elde edilen polinomiyal interpolasyondan bulunan ikinci dereceden polinom

$f(x) = 0.34202 + 0.01612 \cdot (x - 20°) - 0.0000644 \cdot (x - 20°) \cdot (x - 25°)$

şeklindedir. Bu denklemde $x = 32°$ yazarsak, $f(32°) = 0.53005$ yaklaşık değeri elde edilir 32° nin gerçek değeri ise sin$(32°) = 0.52992$ dir.