2. MATRİSLER

Denklem sistemlerinin yazımında, koordinat sistemlerinin dönüşümünde, vektörel işlemlerde (vektörlerin toplanması, çıkarılması, skaler çarpımı, vektörel çarpımı) ve benzeri birçok konuda sistemleri matrislerle göstermek ve matrislerle işlemlerin yapılması daha kolay olmaktadır. Bu işlemler mekanikte, elektrikte, kuantum fiziğinde, ısı yayınımında ve mühendislik uygulamalarında karşımıza çıkmaktadır. Bu yüzden matrisler bir çok sayısal ve analitik yöntemde kullanılır. Bazen matrislerin determinantının yani denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinatının hesaplanması denklem sisteminin çözümlenmesine geçmeden önce (örneğin matrisin determinantı sıfıra eşitse) önemli olmaktadır.

Yukarıda da belirttiğimiz gibi sayısal işlemlerde matrislerin veya determinantların kullanılması büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Bu bölümde matrisler ve determinantlar kullanılarak yapılan bazı sayısal hesaplama yöntemleri anlatılacaktır. Bu sayısal yöntemler, denklem sistemlerinin farklı olmasından (homojen, homojen olmayan, çizgisel bağımlı veya bağımsız vs.) dolayı, birbirinden farklı olan yöntemlerdir. Önce matrislerin ve determinantların bazı özelliklerinden kısaca bahsedilecek, daha sonra çizgisel denklem sistemlerin çözümlerinde kullanılan, yöntemlerden bazıları anlatılacak ve bunların uygulamaları verilecektir.

2.1. DENKLEM SİSTEMLERİ

m tane benzer, çizgisel denklem sistemininin n tane $(x_1,\, x_2,\, ...,x_n)$ değişkeni olsun. Bu denklem sistemini (m-satır, n-sütunu göstermek üzere)

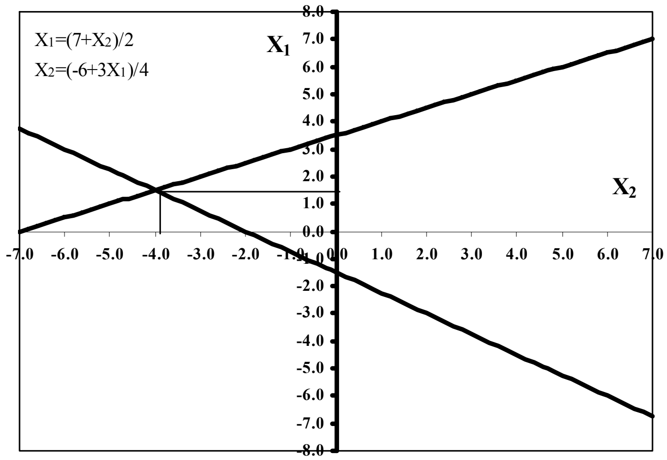
$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\
&. \qquad . \qquad . \\
&. \qquad . \qquad . \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklinde yazabiliriz. Denklemdeki a katsayıları sabit değerleri, x ise değişkenleri (kökleri) ve b değerleri de denklemin homojen olup olmadığını gösteren değerlerdir ($= 0$ veya $\neq 0$). Eğer denklem sisteminin sağ tarafındaki b_i değerleri sıfıra eşitse bu tür denklemlere *homojen*, sıfırdan farklı ise *homojen olmayan* denklem sistemi denir. Denklem sistemindeki bilinmeyenlerin derecesi 1 den büyük ise (x_1^2, x_2^3,...) bu türdeki denklemlere *çizgisel olmayan denklemler* denir. Aşağıdaki homojen fakat çizgisel olmayan bir denklem sistemi gösterilmektedir:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n^3 = 0 \\
&a_{21}x_1^2 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n^3 = 0 \\
&. \qquad . \qquad . \\
&. \qquad . \qquad . \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Yukarıda bahsedildiği gibi bir denklem sistemini çözmek demek, bulunan x değerlerinin katsayılarıyla çarpılması ile bu denklemlerin eşit olduğu b_i değerlerini sağlaması demektir. Örnek olarak aşağıda iki bilinmeyenli (x_1 ve x_2 değişkenlerinden oluşan) bir denklem sistemi $(m = 2,\, n = 2)$ verilmektedir:

$$\begin{aligned}
&2x_1 - x_2 = 7 \\
&3x_1 + 4x_2 = -6
\end{aligned}$$

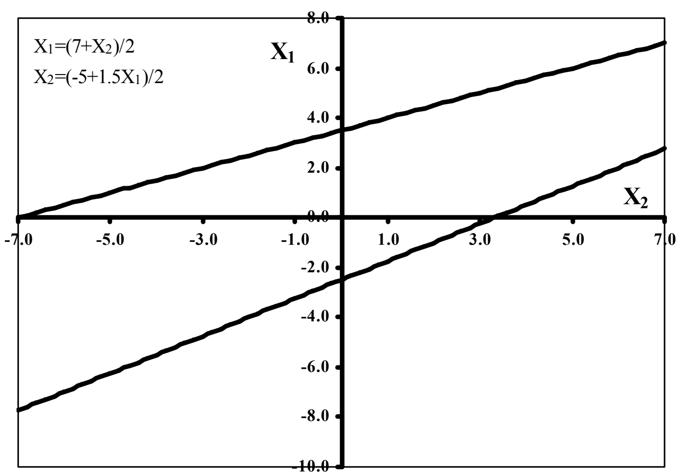


Şekil 2.1 İki bilinmeyenli bir denklem sisteminin çözümü.

Bu denklem sistemi x e göre yerine koyma yöntemine göre çözülürse, $x_1 = -1.5$ ve $x_2 = -4$ olarak bulunabilir (2 ve -3 de bu denklem sisteminin kökleridir). Şekil 2.1 de doğruların çakıştığı nokta denklem sisteminin köklerini göstermektedir. Bulunan bu kök değerleri denklemde yerine koyarak eşitliklerin sağlaması yapılabilir. Bazı durumlarda denklemlerin kökleri (denklemler birbirleri ile çakışmadığı için) bulunamaz, denklem sistemi çözülemez. Buna örnek olarak aşağıdaki denklem sistemi verilebilir:

$2x_1 - x_2 = 7$

$1.5x_1 - 2x_2 = 5$



Şekil 2.2 Çözümü olmayan iki bilinmeyenli bir denklem sistemi.

2.2 MATRİSLER ve DETERMİNATLAR

Aşağıda matris ve determinantların bazı özellikleri verilmektedir:

(**1**) Bir matris, skaler bir nicelikle çarpılırsa matrisin bütün elemanları bu skaler nicelik ile çarpılır:

$$3\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

(**2**) n. dereceden bir A kare matrisinin köşegen üzerindeki eleman sayısı n tanedir (a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}). Bir matrisin elemanları A_{ij} (i-satır, j-sütun) şeklinde gösterilebilir.

(**3**) Bir A matrisinin transpozu, matrisin satırları ile sütunlarının yerdeğiştirilmesidir ve bu matris A^T ile gösterilmektedir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ ve } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 9 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

$B = A^T$ ise $b_{ij} = a_{ji}$ olmalıdır. Dikkat edilirse yukarıdaki matriste diyagonal elemanları yer değiştirmemiştir.

(**4**) Simetrik bir matriste $a_{ij} = a_{ji}$ veya $A = A^T$ dir.

(**5**) Köşegen matris, köşegen dışındaki bütün elemanları sıfır olan matristir:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

(**6**) Birim matris, köşegen üzerindeki elemanları 1 ve bunun dışındaki bütün elemanları sıfır olan matristir ve bu tür matrisleri I simgesi ile göstereceğiz:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

(**7**) $\vec{\boldsymbol{R}} = a\vec{\boldsymbol{x}} + b\vec{\boldsymbol{y}} + c\vec{\boldsymbol{z}}$ şeklindeki bir vektörü bir satır matrisi ile bir kolon matrisinin çarpımı şeklinde yazılabilir:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \vec{\boldsymbol{R}} = a\vec{\boldsymbol{x}} + b\vec{\boldsymbol{y}} + c\vec{\boldsymbol{z}} \tag{2.7}$$

Yukarıdaki denklemde;

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ katsayılar matrisi, $\vec{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix}$ ise vektör matrisidir.

Bu şekliyle $\vec{\boldsymbol{R}}$ vektörünü

$$\vec{\boldsymbol{R}} = A\vec{\boldsymbol{r}} \tag{2.8}$$

olarak yazılabilir.

(**8**) Determinantlar, kare bir matrisin büyüklüğü olarak tanımlanabilir. Örnek olarak 2×2 kare $(\boldsymbol{A})$ matrisinin determinantı veya büyüklüğü aşağıdaki gibi verilir:

$$|\,\boldsymbol{A}\,| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{2.9}$$

(**9**) İki matrisin toplamı $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ şeklindedir. İki matrisin toplanabilmesi için her iki matrisin satır ve sütun sayılarının birbirine eşit olmalıdır. İki matrisin çarpımı ise $C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{jk}$ şeklinde yazılabilir. İki matrisin birbiri ile çarpılabilmesi için birinin satır sayısı diğerinin sütun sayısına eşit olmalıdır.

(**10**) $A\vec{\boldsymbol{x}} = \lambda\vec{\boldsymbol{x}}$ eşitliği $\vec{\boldsymbol{x}}$ özvektör ve λ özdeğer olmak üzere özdeğer problemidir.

2.3. BASİT GAUSS ELEME YÖNTEMİ

Basit Gauss yöntemi aşağıdaki denklem sistemine uygulandığı gibidir:

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + \ldots + a_{1\mathrm{n}} x_n = b_1 \tag{2.36a}$$
$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 + \ldots + a_{2\mathrm{n}} x_n = b_2 \tag{2.36b}$$
$$a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 + \ldots + a_{3\mathrm{n}} x_n = b_2 \tag{2.36c}$$

.

.

$$a_{\mathrm{n}1}\, x_1 + a_{\mathrm{n}2}\, x_2 + a_{\mathrm{n}3}\, x_3 + \ldots + a_{\mathrm{nn}} x_n = b_{\mathrm{n}} \tag{2.36d}$$

tipindeki bir denklem sisteminde (2.36a) nolu denklemi a_{21}/a_{11} ile çarpıp, (2.36b) nolu denklem bu denklemden çıkartılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\tfrac{a_{21}}{a_{11}}[a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + \ldots + a_{1\mathrm{n}} x_n] = \tfrac{a_{21}}{a_{11}} b_1 \tag{2.37a}$$
$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 + \ldots + a_{2\mathrm{n}} x_n = b_2 \tag{2.37b}$$

Böylece (2.36b) nolu denklemden x_1 i yok etmiş oluruz:

$$\begin{aligned}&(\tfrac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} - a_{22})\, x_2 + (\tfrac{a_{21}}{a_{11}} a_{13} - a_{23})\, x_3 + \ldots + (\tfrac{a_{21}}{a_{11}} a_{1\mathrm{n}} - a_{2n}) x_n] \\ &\quad = \tfrac{a_{21}}{a_{11}} b_1 - b_2\end{aligned} \tag{2.38}$$

Benzer bir işlemi denklem (2.36c) ile (2.36a) arasında yaparsak yani a_{31}/a_{11} ile (2.36a) denklemini çarpıp (2.36c) nolu denklemi bu çarpım sonucundan çıkartırsak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\tfrac{a_{31}}{a_{11}}[a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + \ldots + a_{1\mathrm{n}} x_n] = \tfrac{a_{31}}{a_{11}} b_1 \tag{2.39}$$
$$a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 + \ldots + a_{3\mathrm{n}} x_n = b_3 \tag{2.36c}$$

Böylece (2.36c) nolu denklemden x_1 i yok etmiş oluruz:

$$\begin{aligned}&(\tfrac{a_{31}}{a_{11}} a_{12} - a_{32})\, x_2 + (\tfrac{a_{31}}{a_{11}} a_{13} - a_{33})\, x_3 + \ldots + (\tfrac{a_{31}}{a_{11}} a_{1\mathrm{n}} - a_{3n}) x_n] \\ &\quad = \tfrac{a_{31}}{a_{11}} b_1 - b_3\end{aligned} \tag{2.40}$$

Bu şekilde (2.36a) denklemi hariç diğer bütün denklemlerden x_1 bilinmeyeni elenmiş olur. Denklem (2.38), denklem (2.40) ve buna benzer diğer denklemlerden yeni katsayılarla önceki denklem sisteminin 1 eksiği olan bir denklem sistemi oluşturulur (n değeri yeni denklem sistemindeki denklem sayısı olsun). Bu denklem sistemi aşağıdaki gibidir:

$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2$ (2.41a)

$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + ... + a'_{3n}x_n = b'_3$ (2.41b)

$a'_{42}x_2 + a'_{43}x_3 + ... + a'_{4n}x_n = b'_4$ (2.41c)

.

.

$a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + ... + a'_{nn}x_n = b'_n$ (2.41d)

Yukarıdaki denklem sisteminde önceki işleme benzer işlem yapılarak denklem (2.41b), (2.41c) ve diğer denklemlerden x_2 bilinmeyeni elenir. Böylelikle x_3, x_4, ... ler elenerek işlemlere sadece x_n kalana kadar devam edilir. x_n değeri hesaplanıp daha sonra geriye doğru x_{n-1}, x_{n-2} bilinmeyenleri sırasıyla başa doğru elde edilir.

2.4. GAUSS ELEME YÖNTEMİ

Gauss eleme yöntemi, denklem sistemlerinin çözümlerini (yani x_1, x_2, ..., x_n kök değerlerini) doğrudan bulabilecek sayısal bir yöntemdir. Bu yöntem aşağıdaki üç bilinmeyenli denklem sisteminin çözümünde gösterilmektedir:

$3x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 3$ (2.23a)

$9x_1 + 0x_2 - 5x_3 = 3$ (2.23b)

$5x_1 - 8x_2 + 6x_3 = -4$ (2.23c)

Birinci denklemde, x_1 i eşitliğin bir tarafında bırakacak şekilde yeniden yazılırsa, yani $x_1 = (3 + 6x_2 - 7x_3)/3 = 1 + 2x_2 - (7/3)x_3$ olur. Bu değeri (2.23b) ve (2.23c) deki denklemlerde kullanılırsa, üç bilinmeyenli denklem sistemini iki bilinmeyenli denklem sistemi halinde yazılabilir. Bu durumda yeni denklem sistemi:

$9(1 + 2x_2 - (7/3)x_3) - 5x_3 = 3$

$5(1 + 2x_2 - (7/3)x_3) - 8x_2 + 6x_3 = -4$

ve

$9 + 18x_2 - 21x_3 - 5x_3 = 3$

$5 + 10x_2 - (35/3)x_3 - 8x_2 + 6x_3 = -4$

$18x_2 - 26x_3 = -6$ (2.24a)

$2x_2 - (17/3)x_3 = -9$ (2.24b)

olarak yazılabilir. Bu yeni iki bilinmeyenli denklem sisteminde $x_2 = (26x_3 - 6)/18$ yazılır ve bu son değeri yukarıdaki (2.24b) denkleminde kullanırsak

$2((26x_3 - 6)/18) - (17/3)x_3 = -9$

$9 \times (2 \times 26/18)x_3 - 9 \times (6/18) - 9 \times (17/3)x_3 = -9 \times 9$ (2.25)

tek bilinmeyenli denklemi elde ederiz. Buradan $26x_3 - 6 - 51x_3 = -81$ şeklinde bir bilinmeyenli denklem sistemi elde edilir. Buraya kadar yapılan işlemlere dikkat edilirse, denklem sistemini temsil eden matrisin köşegenleştirildiği görülebilir, yani köşegen dışındaki elemanların sıfırlanması işlemi yapılmıştır. $-25x_3 = -81 + 6 = 75$ ve buradan $x_3 = 3$ olarak elde edilir. Yukarıdaki işleme benzer olarak x_2 ve x_1 sırasıyla (geriye doğru) 4 ve 2 olarak elde edilir.

En başta verilen denklem sistemini aşağıdaki gibi matris formunda da yazılabilir:

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 7 \\ 9 & 0 & -5 \\ 5 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

Eşitliğin sol tarafındaki ilk matris, katsayılar matrisi olarak isimlendirilir. x_i lerden oluşan matrise ise sütun matrisi veya vektör matrisi denir. Bu denklem sistemini matrislerle çözebilmek için, eşitliğin sağındaki matrisi sol taraftaki matris içine yazarsak, yeni oluşan matris (augmented matrix):

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 7 & | & 3 \\ 9 & 0 & -5 & | & 3 \\ 5 & -8 & 6 & | & -4 \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

şeklinde olacaktır. Şimdi yukarıdaki matrisi eleme yöntemini kullanarak (yukarıdaki örnekte olduğu gibi) çözmeye çalışalım (x_1, x_2 ve x_3 değerlerinin bulunması). Denklem sistemini oluşturan matrisi

$$\begin{pmatrix} a"_{11} & 0 & 0 & | \; c_1 \\ 0 & a"_{22} & 0 & | \; c_2 \\ 0 & 0 & a"_{33} & | \; c_3 \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

şeklinde köşegen matrisi haline getirebilirsek, aradığımız x_i değerlerini yani bilinmeyenler bulunmuş olur. Bu kökler ise matrisin en son durumunda elde edildiği gibi aşağıda verilmektedir:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1/a"_{11} \\ x_2 &= c_2/a"_{22} \\ x_3 &= c_3/a"_{33} \end{aligned} \tag{2.29}$$

Kısacası yukarıdaki (2.28) denklemindeki matrisi elde edebilmek için şu aşamalardan geçilir:

(**1**) Verilen denklemlerden birisi seçilir, buradaki değişkenlerden biri (örneğin x_1) diğer denklemlerde yerine yazılır,
(**2**) Şimdi elimizde denklem sayısı 1 eksilmiş yeni denklem sistemi vardır (x_2 ve x_3 değişkenlerinden oluşan denklem sistemi), bu denklemlerden biri seçilir ve değişkenlerden biri cinsinden bir denklem yazılır,
(**3**) (**2**) de elde edilen değer sonraki denklemlerde yerine yazılır ve işlem bu şekilde tek denklem ve tek bilinmeyenli değişken elde edilene kadar devam edilir.

Yukarıda verilen aşamaları adım adım aşağıdaki örneğimize uygulayalım:

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 7 & | & 3 \\ 9 & 0 & -5 & | & 3 \\ 5 & -8 & 6 & | & -4 \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

Öncelikle, ilk satır hariç diğer satırlardaki (2. ve 3.), ilk elemanları eleriz (a_{21} ve a_{31} elemanlarını sıfır yaparız). a_{21} i sıfır yapmak için, bu elemandan a_{21} değerini çıkarır ve yeni ikinci satırı şu şekilde elde ederiz:

$$\text{Yeni 2.satır} = a_{11}(\text{2.satır elemanları}) - a_{21}(\text{1.satır elemanları}) \tag{2.31}$$

$$a'_{2j} = a_{11}(a_{2j}) - a_{21}(a_{1j})$$
$$a'_{21} = a_{11}(a_{21}) - a_{21}(a_{11}) = 3 \times 9 - 9 \times 3 = 0$$
$$a'_{22} = a_{11}(a_{22}) - a_{21}(a_{12}) = 3 \times 0 - 9 \times (-6) = 54$$
$$a'_{23} = a_{11}(a_{23}) - a_{21}(a_{13}) = 3 \times (-5) - 9 \times 7 = -78$$
$$a'_{24} = a_{11}(a_{24}) - a_{21}(a_{14}) = 3 \times 3 - 9 \times 3 = -18$$

Bu durumda yeni matris şu şekilde olur:

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 7 & | & 3 \\ 0 & 54 & -78 & | & -18 \\ 5 & -8 & 6 & | & -4 \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

Şimdi a_{31} (katsayısını) sıfır yapmak için gerekli olan denklem aşağıdaki gibidir:

$$\text{Yeni 3.satır} = a_{11}(\text{3.satır elemanları}) - a_{31}(\text{1.satır elemanları}) \tag{2.33}$$

$$a'_{3j} = a_{11}(a_{3j}) - a_{31}(a_{1j})$$
$$a'_{31} = a_{11}(a_{31}) - a_{31}(a_{11}) = 3 \times 5 - 5 \times 3 = 0$$
$$a'_{32} = a_{11}(a_{32}) - a_{31}(a_{12}) = 3 \times (-8) - 5 \times (-6) = 6$$
$$a'_{33} = a_{11}(a_{33}) - a_{31}(a_{13}) = 3 \times 6 - 5 \times 7 = -17$$
$$a'_{34} = a_{11}(a_{34}) - a_{31}(a_{14}) = 3 \times (-4) - 5 \times 3 = -27$$

Buraya kadar olan kısımda ikinci adım gerçekleştirilmiş olur ve yeni matris,

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 7 & | & 3 \\ 0 & 54 & -78 & | & -18 \\ 0 & 6 & -17 & | & -27 \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

şeklinde oluşur.

Buraya kadar yapılan işlemler, yani 2. satır ve 3. satırın ilk elemanlarının sıfır yapılması işlemi 1.aşama olarak isimlendirilir. Bu aşamada, dikkat edilirse a_{11} elemanının bulunduğu satırla ilgili olarak bir işlem yapılmamıştır. Bu aşamada 1nci satırdaki a_{11} elemanına <u>*sabit (pivot) eleman*</u> ve 1.satırada <u>*sabit (pivot) satır*</u> denir. Aynı zamanda yukarıdaki matris çizgisel denklem sistemini tanımlamaktadır.

2. aşamada ise (1. aşamadakine benzer olarak) 2.satır elemanlarına dokunulmadan diğer satırlardaki (1. ve 3. satır) köşegen dışı elemanların elenmesi (sıfırlanması) işlem yapılır.

3. aşamada ise (1. ve 2. aşamadakine benzer olarak) 3.satır elemanlarına dokunulmadan diğer satırlardaki (1. ve 2. satır) köşegen dışı elemanların elenmesi (sıfırlanması) işlemler yapılır. Yukarıdaki (1., 2. ve 3.) aşamalar bitirildikten sonra aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned} -72{,}900x_1 &= -145{,}800 \\ -24{,}300x_2 &= -97{,}200 \\ -450x_3 &= -1{,}350 \end{aligned} \tag{2.35}$$

buradan da $x_1,\ x_2\ ve\ x_3$ değerlerini kolaylıkla buluruz. 1., 2. ve 3. aşamaların yapıldığı işlemlerin hepsi aşağıdaki 2.1 örneğinde verilmiştir.

Örnek 2.1. Aşağıda verilen matrisin veya denklem sisteminin köklerini bulunuz.

Verilen matris	Örnek
$a_{11}\quad a_{12}\quad a_{13}\quad a_{14}$	$3\quad -6\quad 7\quad 3$
$a_{21}\quad a_{22}\quad a_{23}\quad a_{24}$	$9\quad 0\quad -5\quad 3$
$a_{31}\quad a_{23}\quad a_{33}\quad a_{34}$	$5\quad -8\quad 6\quad -4$

1.Aşama k=1, bulunduğumuz satır=1.satır, a_{11}

$i=2$	$a'_{2j} = a_{11}\times a_{2j} - a_{21}\times a_{1j}$	
$j=1,2,3,4$	$a_{11}\quad a_{12}\quad a_{13}\quad a_{14}$	$3\quad -6\quad 7\quad 3$
	$0\quad a'_{22}\quad a'_{23}\quad a'_{24}$	$0\quad 54\quad -78\quad -18$
	$a_{31}\quad a_{32}\quad a_{33}\quad a_{34}$	$5\quad -8\quad 6\quad -4$
$i=3$	$a'_{3j} = a_{11}\times a_{3j} - a_{31}\times a_{1j}$	
$j=1,2,3,4$	$a_{11}\quad a_{12}\quad a_{13}\quad a_{14}$	$3\quad -6\quad 7\quad 3$
	$0\quad a'_{22}\quad a'_{23}\quad a'_{24}$	$0\quad 54\quad -78\quad -18$
	$0\quad a'_{32}\quad a'_{33}\quad a'_{34}$	$0\quad 6\quad -17\quad -27$

2.Aşama k=2, bulunduğumuz satır=2.satır, a'_{22}

$i=1$	$a'_{1j} = a'_{22}\times a_{1j} - a_{12}\times a'_{2j}$	
$j=1,2,3,4$	$a'_{11}\quad 0\quad a'_{13}\quad a'_{14}$	$162\quad 0\quad -90\quad 54$
	$0\quad a'_{22}\quad a'_{23}\quad a'_{24}$	$0\quad 54\quad -78\quad -18$
	$0\quad a'_{32}\quad a'_{33}\quad a'_{34}$	$0\quad 6\quad -17\quad -27$
$i=3$	$a''_{3j} = a'_{22}\times a'_{3j} - a'_{32}\times a'_{2j}$	
$j=1,2,3,4$	$a'_{11}\quad 0\quad a'_{13}\quad a'_{14}$	$162\quad 0\quad -90\quad 54$
	$0\quad a'_{22}\quad a'_{23}\quad a'_{24}$	$0\quad 54\quad -78\quad -18$
	$0\quad 0\quad a''_{33}\quad a''_{34}$	$0\quad 0\quad -450\quad -1350$

===

| 3.Aşama k=3, bulunduğumuz satır=3.satır, a''_{33} |

| $i=1$ | $a''_{1j} = a''_{33} \times a'_{1j} - a'_{13} \times a''_{3j}$ |

$$
j=1,2,3,4 \quad \begin{matrix} a''_{11} & 0 & 0 & a''_{14} \\ 0 & a''_{22} & a''_{23} & a''_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \end{matrix} \quad \Big| \quad \begin{matrix} -72900 & 0 & 0 & -145800 \\ 0 & 54 & -78 & -18 \\ 0 & 0 & -450 & -1350 \end{matrix}
$$

| $i=2$ | $a'''_{2j} = a''_{33} \times a''_{2j} - a''_{23} \times a''_{3j}$ |

$$
j=1,2,3,4 \quad \begin{matrix} a''_{11} & 0 & 0 & a''_{14} \\ 0 & a'''_{22} & 0 & a'''_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \end{matrix} \quad \Big| \quad \begin{matrix} -72900 & 0 & 0 & -145800 \\ 0 & -24300 & 0 & -97200 \\ 0 & 0 & -450 & -1350 \end{matrix}
$$

Çözümler

$$a''_{11}x_1 = a''_{14} \;\text{-->}\; -72,900x_1 = -145,800 \quad x_1 = 2$$
$$a'''_{22}x_2 = a'''_{24} \;\text{-->}\; -24,300x_2 = -97,200 \quad x_2 = 4$$
$$a''_{33}x_3 = a''_{34} \;\text{-->}\; -450x_3 = -1,350 \quad x_3 = 3$$

olarak bilinmeyenler elde edilir. Denklem sisteminin kökleri hesaplanmış olur. Eleme işlemi üç aşamada yapılmakta (3×3 matris olduğu için) ve her aşamada katsayılar matrisinin 2 elemanının değeri sıfır yapılmaktadır. Böylece 1. aşamada (k=1), a_{21} ve a_{31} sıfır yapılmakta, 2. aşamada ise (k=2) a_{12} ve a'_{32} ve üçüncü aşamada (k=3) ise a'_{13} ve a'_{23} değerleri sıfır yapılmaktadır. Özetlersek, her aşamada (k=1, 2, 3) önce bir sabit eleman (a_{kk}) seçilir ve bu elemanın bulunduğu satır dışındaki matris (a_{ij}) elemanları için eleme işlemi yapılır.

2.6. MATRİSİN TERSİ (EVRİĞİ)

Matrisleri köşegen haline getirebilmek için kullanılan yöntemlerden biriside matrisi tersi ile çarpmaktır. Bir A matrisi öyle bir matrisle çarpılır ki çarpım sonucunda oluşan matris I birim matrisi olur. Böyle bir matris bulunabilirse bu matrise A *matrisinin evriği* veya *tersi* denir. A matrisinin C gibi bir matris ile çarpımı

$$AC = AA^{-1} = A^{-1}A = I \tag{2.23}$$

şeklinde verilsin. Çarpım sonucunda elde edilen matrisin bütün köşegen elemanları 1 ve köşegen dışındaki elemanları 0 dır. Bu matrise <u>*birim matris*</u> denir. Verilen herhangi bir A matrisinin tersi olan bir $C = A^{-1}$ matrisini hesaplamak için Gauss-Jordan eleme yöntemini kullanabiliriz. $n \times n$ kare matrisinin ters matrisini hesaplamak için aşağıdaki basamakları içeren işlemler yapılır;

(**1**) matrisin sıraları değiştirilir,

(**2**) matrisin normalizasyon işlemi yapılır,

(**3**) matriste eleme işlemi yapılır.

Verilen bir $\boldsymbol{A}$ matrisinin tersini bulmak için $\boldsymbol{A}$ matrisi ile aynı boyutta olan birim matrisi yanyana yazarak aşağıdaki gibi bir çift matris oluşturulur:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

Aşağıdaki örnekte Gauss-Jordan yöntemi kullanılarak, verilen bir matrisin tersi alınmıştır.

Örnek 2.4. Aşağıdaki matrisi birim matris haline getiriniz.

Verilen matris			birim matris		
3	-6	7	1	0	0
9	0	-5	0	1	0
5	-8	6	0	0	1

1.Aşama k=1, bulunduğumuz satır=1.satır

i=1, Yeni 1.satır $a'_{1j}=(a_{1j})/a_{11}$				$I'_{1j}=(I_{1j})/a_{11}$		
j=1,2,3,4	1	-2	2.33	0.33	0	0
	9	0	-5	0	1	0
	5	-8	6	0	0	1

i=2, Yeni 2.satır $a'_{2j}=a_{2j}-a_{21}\times a'_{1j}$				$I'_{2j}=I_{2j}-a_{21}\times I'_{1j}$		
j=2,3,4	1	-2	2.33	0.33	0	0
	0	18	-26	-3	1	0
	5	-8	6	0	0	1

i=3, Yeni 3.satır $a'_{3j}=a_{3j}-a_{31}\times a'_{1j}$				$I'_{3j}=I_{3j}-a_{31}\times I'_{1j}$		
j=2,3,4	1	-2	2.33	0.33	0	0
	0	18	-26	-3	1	0
	0	2	5.65	-1.65	0	1

2.Aşama k=2, bulunduğumuz satır=2.satır

i=2, Yeni 2.satir $a''_{2j}=(a'_{2j})/a'_{22}$				$I''_{2j}=(I'_{2j})/a'_{22}$		
j=2,3,4	1	-2	2.33	0.33	0	0
	0	1	-1.44	-0.17	0.06	0
	0	2	-5.65	-1.65	0	1

i=1, Yeni 1.satır $a''_{1j}=a'_{1j}-a'_{12}\times a''_{2j}$				$I''_{1j}=I'_{1j}-a'_{12}\times I''_{2j}$		
j=3,4	1	0	-0.55	-0.01	0.12	0
	0	1	-1.44	-0.17	0.06	0
	0	2	-5.65	-1.65	0	1

i=3, Yeni 3.satır $a''_{3j}=a'_{3j}-a'_{12}\times a''_{2j}$				$I''_{3j}=I'_{3j}-a'_{12}\times I''_{2j}$		
j=3,4	1	0	-0.55	-0.01	0.12	0
	0	1	-1.44	-0.17	0.06	0
	0	2	-2.77	-1.31	-0.12	1

3.Aşama k=3, bulunduğumuz satır=3

i=3, Yeni 3.satır $a'''_{3j}=(a''_{3j})/a''_{33}$				$I'''_{3j}=(I''_{3j})/a''_{33}$		
j=3,4	1	0	-0.55	-0.01	0.12	0
	0	1	-1.44	-0.17	0.06	0
	0	0	1	0.48	0.04	-0.36

i=1, Yeni 2.satır $a'''_{2j}=a''_{2j}-a''_{23}\times a'''_{3j}$				$I'''_{2j}=I''_{2j}-a''_{23}\times I'''_{3j}$		
j=4	1	0	-0.55	-0.01	0.12	0
	0	1	0	0.52	0.06	-0.52
	0	0	1	0.48	0.04	-0.36

```
| i=2, Yeni 1.satır a''1j'=a''1j-a''13 × a''3j'  I''1j'=I''1j-a''13 × I''3j'|
| j=4       |   1   0   0       |   0.26   0.14 -0.22|
|           |   0   1   0       |   0.52   0.12 -0.52|
|           |   0   0   1       |   0.48   0.04 -0.36|
-------------------------------------------------------
```

Matrisi köşegenleştirme işlemi, verilen matrisin 1.satırını normalize ederek başlayıp daha sonra a_{21} ve a_{31} terimlerini eleyerek devam ederiz. Aşağıdaki matris, 1. aşamada yapılan eleme işlemi sonucunda elde edilen matristir:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} & | \; 1/a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}\text{-}a_{21}(a_{12}/a_{11}) & a_{23}\text{-}a_{21}(a_{13}/a_{11}) & | \; \text{-}a_{21}/a_{11} & 1 & 0 \\ 0 & a_{22}\text{-}a_{31}(a_{12}/a_{11}) & a_{33}\text{-}a_{31}(a_{13}/a_{11}) & | \; \text{-}a_{31}/a_{11} & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

Yukarıdaki matriste görüldüğü gibi matrisin 2. ve 3. satırındaki ilk elemanlar sıfırlanmış ve 1. satırın ilk elemanı ise normalize edilmiştir. Diğer aşamalarda da benzer işlemler yapılarak yeni matris elemanları oluşturulur. Matristeki diğer değişkenlerde eleme işleminden geçirilerek sonuçta yeni birim matrisi ve A^{-1} ters matrisi aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 1 & 0 & | & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 & | & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

matrisi elde edilir. Buradaki C matrisi, A nın evriği olan matristir.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 7 \\ 9 & 0 & -5 \\ 5 & -8 & 6 \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

ise bu matrisin evriği olan matris ise

$$C = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.26 & 0.14 & -0.20 \\ 0.52 & 0.12 & -0.52 \\ 0.48 & 0.04 & -0.36 \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

2.6. GAUSS-SEIDEL ÖTELEME YÖNTEMİ

Daha önceki kesimde denklem çözümlerini doğrudan bulan Gauss-Jordan yöntemi anlatılmıştı. Bu kesimde ise sayısal öteleme işlemi yapılarak denklem sistemleri çözülmeye çalışılacaktır. Gauss-Seidel yöntemini denklem sistemlerine uygulayabilmek için, verilen matrisin köşegeni üzerindeki elemanların diğer elemanlardan (köşegen dışı) büyük olması gerekmektedir. Çizgisel denklem sistemi:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \;..........+ a_{1n}x_n = c_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \;..........+ a_{2n}x_n = c_2 \\ &. \\ &. \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \;..........+ a_{nn}x_n = c_n \end{aligned} \tag{2.35}$$

şeklinde verilmiş olsun. i nci denklem için x_i çözümleri:

$$x_1 = -\frac{a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n - c_1}{a_{11}}$$

eşitliği ile bulunabilir (denklemdeki x_2, x_3, x_4, ... , x_n değişkenlerine başlangıç değerlerinin verilmesi gerekmektedir).

$$x_2 = -\frac{a_{21}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n - c_2}{a_{22}}$$
$$x_3 = -\frac{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n - c_3}{a_{33}}$$
.
.
$$x_n = -\frac{a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n - c_n}{a_{nn}} \quad (2.36)$$

Gauss-Seidel yöntemini bir denklem sistemine uygulayabilmek için öncelikle x_i ye $(i = 1, 2, 3..., n)$ başlangıç değerlerinin verilmesi gerekmektedir. Bulunan değerler sonraki adımda elde edilecek yeni veriler olarak, yeni başlangıç değerleri olarak kullanılacaktır.

Aşağıdaki örnekte iki bilinmeyenli iki denklemin çözümünde Gauss-Seidel yöntemini kullanılmaktadır:

$$3x_1 + x_2 = 5$$
$$x_1 + 2x_2 = 5 \quad (2.37)$$

Bu denklemler yeniden düzenlenirse,

$$x_1 = \frac{-x_2}{3} + \frac{5}{3}$$

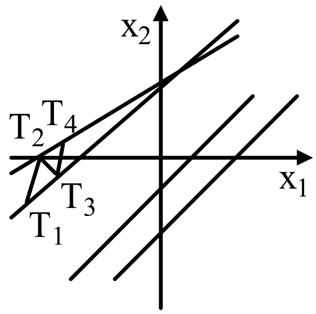
$$x_2 = \frac{-x_1}{2} + \frac{5}{2} \quad (2.38)$$

elde ederiz. Başlangıç değerleri için $x_1 = 0$ ve $x_2 = 0$ veririlirse yukarıdaki denklemler çözülebilir. Aşağıda Çizelge 2.1 de bu işlemler adım adım gösterilmiştir: Öteleme işlemi bir önceki veriler kullanılarak yapılırsa sonuca daha kolay bir şekilde ulaşılabilir:

Çizelge 2.1. Gauss-Seidel öteleme yönteminin uygulanması.

Adım sayısı	x_1	x_2
1	0	0
2	5/3	-(1/2)(5/3) + 5/2 = 5/3
3	-(1/3)(5/3) + 5/3 = 10/9	-(10/2)(9) + 5/2 =35/18
.		
Doğru çözüm	1	2

Gauss-Seidel öteleme yöntemi bazı durumlarda yetersiz kalmaktadır. Denklemdeki katsayıların birbirlerine çok yakın değerler alması veya başlangıç değerlerinin yanlış bölgede seçilmesi durumunda çözümden uzaklaşılır. Bu tür denklem sistemleriyle, Şekil 2.1. deki üst kısımdaki doğruların birbirlerini kestikleri noktalarda çok yavaş değiştikleri durumlarda karşılaşabiliriz. Şekilden görüldüğü gibi P noktası tam olarak (kesişme noktasında) belirlenememektedir. Yani denklemlerin eğimleri birbirine çok yakınsa, sonuçların bulunması zorlaşmaktadır. Ayrıca denklem sistemimiz tekillik (singular) gösteriyorsa, yani doğrular birbirine paralel (kesişmiyorlar) ise yine sonuç bulunamaz.



Şekil 2.1. Gauss-Seidel öteleme yöntemine göre denklem sistemlerinin çözümlenmesi.

Aşağıdaki gibi bir denklem sistemi verilirse, bu denklem sisteminin çözümlerini Gauss-Seidel yöntemine göre bulmaya çalışalım:

$$4x_1 + 3x_2 = 7$$
$$8x_1 + 6x_2 = 14 \tag{2.39}$$

denklemleri yeniden yazarsak

$$x_1 = \frac{7-3x_2}{4}$$

$$x_2 = \frac{14-8x_1}{6} = \frac{7-4x_1}{3} \tag{2.40}$$

denklemleri elde edilir.

Adım sayısı	x_1	x_2
1	7/4	0
2	7/4	0
3	7/4	0
4	7/4	0

Yukarıdaki çizelgelerden de görüldüğü gibi x_1 ve x_2 kökleri bu gibi durumlarda bulunamaz.

Gauss-Seidel öteleme yöntemini denklem sistemlerine uygularken işlemleri sonlandırma kriteri olarak aşağıdaki (2.41) denklemi kullanılabilir:

$$\left|\frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}}\right| < \delta \qquad \text{veya} \qquad |x_i^{(k+1)}| < |x_i^{(k)}| \tag{2.41}$$

Yukarıdaki denklemde k adım sayısı, i değişken sayısı, δ tolerans 1 den küçük bir değer olup 0.9 ile 0.999 arasında olabilir. Yani x_i değerinin hesaplanmadan önceki ve hesaplamadan sonraki değerleri karşılaştırılır.