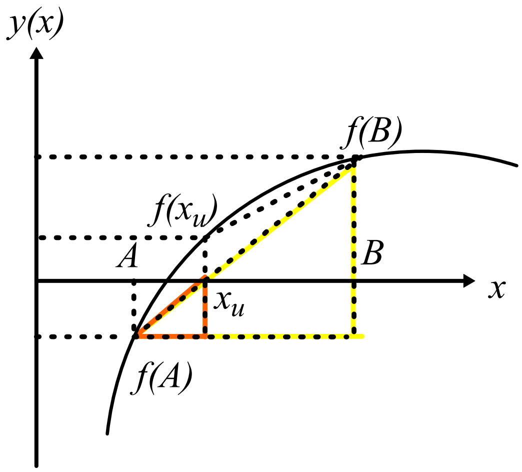
1.5. REGULA-FALSI veya SEKANT YÖNTEMİ

Bu yöntem *regula-falsi, sekant* veya *kiriş yöntemi* olarak adlandırılmaktadır. Yöntem, öteleme işlemleri sonucunda kök değerine yani fonksiyonu sıfır yapmaya çalışan değere yaklaşmayı amaçlamaktadır. Bu yöntemde, Şekil 1.11 den görüleceği gibi benzer iki üçgenin özelliklerinden yararlanarak bir matematiksel ifade elde edilir:

$$\frac{x_u - A}{B - A} = \frac{f(x_u) - f(A)}{f(B) - f(A)} \tag{1.12}$$



Şekil 1.11. Regula-Falsi veya sekant yöntemi.

Denklemdeki A ve B değerleri kökün aranacağı $[A, B]$ sınır değerleri veya ilk değerler olarak tanımlanabilir. Denklem (1.12) de kök değeri olarak kabul edilen x_u noktasında $f(x_u) = 0$ olarak alınırsa

$$\frac{f(A)}{x_u - A} = \frac{f(A) - f(B)}{B - A} \tag{1.13}$$

veya

$$x_u = A + (B - A)\frac{f(A)}{f(A) - f(B)} \tag{1.14}$$

ifadeleri yazılabilir. Böylelikle ikinci ötelemedeki x_u kök değeri, yani bir sonraki adımdaki başlangıç değeri bulunur. Artık kök değeri, $A \le x \le x_u$ veya $x_u \le x \le B$ bölmelerinden birinde aranır. Bu işlem, daha önce ikiye bölme yönteminde olduğu gibi $f(x_u) \cdot f(A)$ veya $f(x_u) \cdot f(B)$ çarpımlarının işaretine bakarak yönlendirilebilir. $f(B) \cdot f(x_u) < 0$ ise, kök sağ bölmede kalır ve A nin yeni değeri x_u olur. Benzer olarak $f(A) \cdot f(x_u) < 0$ ise kök sol bölmededir ve B nin yeni değeri x_u olmalıdır. Regula-Falsi yöntemi bir çeşit çizgisel interpolasyondur.

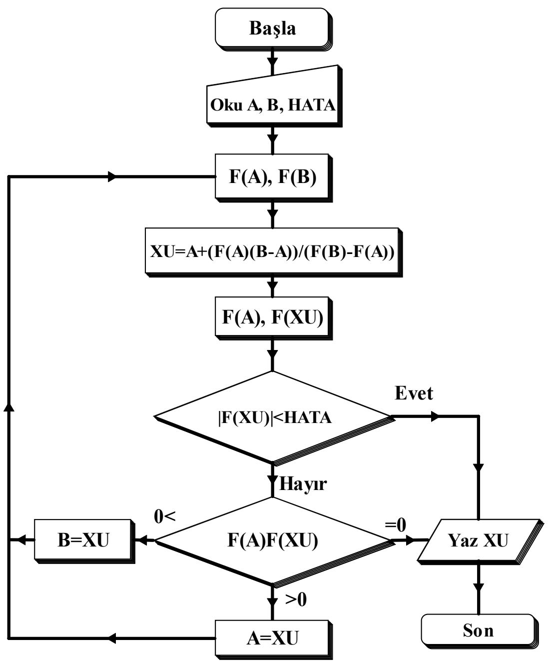
Secant yönteminde bir $f(x)$ fonksiyonunun kök değeri $f(a) \sim f(b)$ durumunda zorlaşmaktadır. Ayrıca $f(x)$ fonksiyonunun x e göre değişiminde $f(x)$ fonskiyonu x eksenine teğet ise çözüm yine zorlaşmaktadır. Bu yöntemde $f(x)$ fonksiyonunun birinci türevinin sıfır olması durumuna ve $f(x)$ fonksiyonun a ve b noktalarındaki teğetlerinin (türevlerinin) eğiminin a ve b noktaları arasında sıkışıp kalmaması durumuna da dikkat etmek gerekmektedir. Aşağıda Regula-Falsi yönteminin algoritması ve Şekil 1.12 de akış diyagramı verilmektedir.

Algoritma 1.3 Regula-Falsi yönteminin algoritması.

```
1. Başla
2. Oku A, B, HATA
3. XU = A + F(A)*(B-A) / (F(A)-F(B))
4. Eğer |F(XU)| < HATA ise Git 8
5. Eğer F(XU)*F(A) < 0 ise B = XU
6. Eğer F(XU)*F(A) > 0 ise A = XU
7. Git 3
8. Yaz XU
9. Son
```

Öteleme işlemine yani kökü bulma işlemine $|f(x_u)| < \varepsilon$ şartı sağlanana kadar devam edilir. Burada ε, programın başlarında verilen ve programın çalışmasını sonlandıran bir duyarlık kriteridir. Örneğin bu kriter 10^{-5} gibi bir değer olabilir. Ayrıca öteleme işlemi $|\ B-A\ | < \varepsilon$ olduğu durumda da kesilebilir veya x_n en son kök değerinden bir önceki değer ise

$$\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - x_n \qquad (1.15a)$$



Şekil 1.12 Regula-Falsi yönteminin akış şeması.

olmak üzere,

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_n\varepsilon_{n-1}\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} + O(\varepsilon_n^3) \qquad (1.15b)$$

hata değeri olarak hesaplanabilir.

Regula-Falsi öteleme denklemi Newton-Raphson yönteminde türev terimi yerine,

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}} \qquad (1.16)$$

ifadesi kullanılacak olur ve denklem yeniden düzenlenirse;

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

$$= x_n - (x_n - x_{n-1})\frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(x_{n-1})} \qquad (1.17)$$

elde edilir. Yukarıdaki (1.17) denkleminde verilen değer, secant yöntemine göre, bir fonksiyonun kökünün bulunması için öteleme ile elde edilecek yeni değerdir. Yukarıdaki denklem, Newton-Raphson yönteminde fonksiyonun tanjantı yerine sekantı kullanılarak elde edilmiş olan bir denklemdir.

Örnek 1.6 Aşağıdaki polinomun köklerini bulunuz.

$$f(x) = x^3 - 23x^2 + 62x - 40 = 0 \qquad (1.18)$$

polinomu öteleme işlemi yapılacak halde

$$x^3 = 23x^2 - 62x + 40 \qquad (1.19a)$$

$$x = \frac{23x^2 - 62x + 40}{x^2} \qquad (1.19a)$$

$$x = 23 - \frac{62}{x} + \frac{40}{x^2} = F(x) \qquad (1.19c)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. $x_1 = 21$ başlangıç değeri ile öteleme işlemine başlanırsa,

$$\begin{array}{ll} x_1 = 21 & F(21) = 23 - \frac{62}{21} + \frac{40}{21^2} = 20.138 \\ x_2 = 20.138 & F(20.138) = 23 - \frac{62}{20.138} + \frac{40}{20.138^2} = 20.020 \\ x_3 = 20.020 & F(20.020) = 23 - \frac{62}{20.020} + \frac{40}{20.020^2} = 20.003 \end{array} \qquad (1.20)$$

değerleri elde edilir. Yukarıdaki denklemi $x = \frac{x^2}{23} + \frac{62}{23} - \frac{40}{23x} = F(x)$ şeklinde yazar ve $x = 21$ başlangıç değeri ile öteleme işlemlerine başlarsak sonuca ulaşılamamak$t$adır. Ama $x = 18$ başlangıç değeri ile öteleme işlemi yapılırsa kök değeri $x = 2$ bulunmaktadır. Kısaca derecesi büyük olan değişkeni eşitliğin bir tarafına aktarıp daha sonra bu değişkenin derecesini 1 olacak şekilde eşitliğin her iki tarafına bölerek elde öteleme için denklem 1.19 da gösterildiği gibi kök arama için uygun bir fonskiyon elde edilebilir. Aşağıda öteleme yönteminin algoritması ve Şekil 14 de akış diyagramı verilmektedir.

Algoritma 1.4 Öteleme yönteminin algoritması

```
1.  Başla
2.  I=1
3.  Oku X1, HATA, N
4.  X2=F(X1)
5.  Eğer |(X2-X1)/X2| < HATA İse Git 12
6.  X1=X2
7.  I=I+1
8.  Eğer I = N İse Git 10
```

```
9.  Git 4
10. Yaz "Sonuca ulaşılamadı"
11. Git 13
12. Yaz "Kök =", X2
13. Dur
```

1.16. Bir siyah cismin birim yüzeyinden λ ile $\lambda + d\lambda$ dalga boyları arasında yayılan enerji oranı $q(\lambda)$ Planck yasası ile verilir : $q(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{hc/k\lambda T}-1)} \ \frac{erg}{cm^2 s}$. Denklemde
$c =$ ışık hızı $= 2.997925 \times 10^{10} cm/s$, $h =$ Planck sabiti $= 6.626 \times 10^{-27} erg/s$
$k =$ Boltzmann sabiti $= 1.38054 \times 10^{-16}\ erg/K$, $T =$ Mutlak sıcaklık, Kelvin $\lambda =$ Dalga boyu $= cm$. Enerjinin maksimum şiddete yayınlandığı dalga boyu λ_{max} dır. Bu durum, yani Wien in yerdeğiştirme yasası, $dq(\lambda)/d\lambda = 0$ ile elde edilebilir. $T = 1000,\ 2000,\ 3000,\ 4000\,K$ sıcaklıklarındaki yüzeyden yayınlanan ışınların maksimum λ_{max} dalga boylarını hesaplayınız. Ayrıca verilen T sıcaklıkları için $\lambda_{max} T =$ sabit (=2898 × 10^{-6} $m \cdot K$) olduğunu gösteriniz (Carnahan 1969, s206).

1.17. Bir sıvının hacmi, ortamın sıcaklığı $0°C$ den $33°C$ ye yükseldiğinde $V(T) = 0.9999 - 6.43 \times 10^{-5} T + 8.505 \times 10^{-6} T^2 - 6.8 \times 10^{-8} T^3$ fonksiyonuna göre değişmektedir. Denklemdeki T santigrad derece cinsinden sıcaklığı belirtmektedir. Yoğunluğun maksimum olduğu sıcaklık değerini kök bulma yöntemlerinden birini kullanarak bulunuz (hacmin sıcaklığa göre türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse $\frac{dV}{dT} = 0 = \ - 6.43 \times 10^{-5} + 17.1 \times 10^{-6} T - 20.4 \times 10^{-8} T^2$ ifadesinden yoğunluğun maksimum olduğu değer bulunur) (Barrodale, 1971).

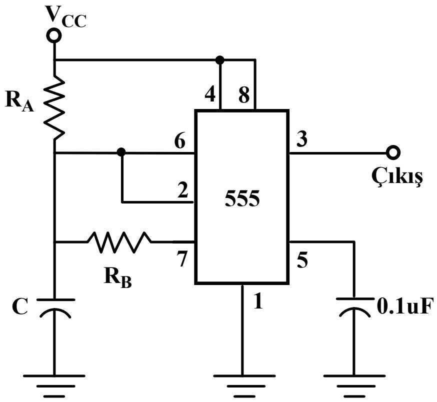
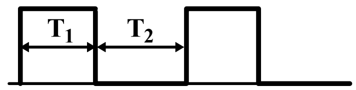
1.28. Lee ve Duffy (*Journal of the American Institute of Chemical Engineering, 1976, 22(4):750-753*) bir sıvı süspansiyonun (bir kimyasalın sıvı içinde çözünmeden durabilmesi) içindeki erimemiş parçacıkların akışkanın içindeki sürtünme faktörünü Reynold katsayısına göre deneysel olarak şu şekilde vermişlerdir: $\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{1}{k}\ln(RE\ \ \sqrt{f}) + (14 - \frac{5.6}{k})$ Denklemdeki f sürtünme faktörü, $RE = 3750$ Reynolds katsayısı, k süspansiyonun konsantrasyonundan elde edilen bir sabittir. %0.08 lik süspansiyon konsantrasyonu için $k = 0.28$ ise f sürtünme katsayısını hesaplayınız (sayfa:105, Gerald and Wheatley, 1997). Denklemi yeniden $\frac{1}{\sqrt{f}} - \frac{1}{k}$ $\ln(RE\sqrt{f}) - (14 - \frac{5.6}{k}) = 0$ şeklinde yazarak bu denklemin kökleri hesaplanabilir.

1.29. 555 devresi ile yapılan bir zamanlayıcı devresi aşağıdaki şekilde verilmektedir.
$T_1 + T_2 = \frac{1}{f}$ burada f frekans, periyotluk döngü $= \frac{T_1}{T_1+T_2}$ × 100%, $T_1 = R_A\,C\,\ln(2)$,
$T_2 = \frac{R_A\,R_B\,C}{R_A+R_B}\ \ln(\ |\ \frac{R_A-2R_B}{2R_A-R_B}\ |\ )$, $R_A = 8670\,Ohm$, $C = 0.01\mu F$, $T_2 = 0.14$ milisaniye olarak verilmişse

a) $T_1,\ f$ ve bir periyotluk döngüyü,

b) R_B yi,

c) Bir f frekansı seçerek T_1 ve T_2 zamanlarını
hesaplayınız (sayfa:106, Gerald and Wheatley, 1997).


V_CC
R_A
4
8
6
3
Çıkış
2
555
R_B
7
5
C
1
0.1uF

T_1
T_2