3. ÖZDEĞERLER VE ÖZVEKTÖRLER

Özdeğerler (veya karakteristik değerler) ve özvektörleri (karakteristik özvektörler), fiziksel bir sistemin sahip olabileceği özel değerlerde nasıl davrandıklarını belirlemek için önemlidir. Bu değerler sisteme ait özel bir enerji, özel bir frekans değeri, dalgaların girişimi veya kuvvet dengesinin sağlandığı bir duruma ait olabilir. Özvektörler ise, fiziksel sistemin sahip olduğu özdeğerlerdeki (örneğin bir dalga) fonksiyonları olabilir. Özdeğerler ve özvektörler, diferensiyel denklemler içeren denklem sistemlerinin çözümlerinde, sınır-değer problemlerinde ortaya çıkabilir. Bu tür denklemlere, kuantum mekaniğinde elektriksel bir potansiyel içinde bulunan bir parçacığın enerjisini hesaplarken, elastik çarpışma problemlerinde, akışkanlar mekaniğinde, titreşim yapan cisimlerin hareketlerinde sıkça karşılaşılır. Titreşim yapan bir sistemin doğal frekansı ile dışarıdan uygulanan sürücü kuvvetin frekansı birbirine eşit veya yakın olması sistemin kararlılığı açısından veya malzemelerin elastik özelliklerinin incelendiği durumlarda, şekil bozukluklarının başladığı noktaların belirlenmesinde özfonksiyonların alacağı özdeğerler önemli olmaktadır.

Aşağıda, ikinci dereceden homojen bir diferensiyel denklem ve bağlı durumları verilmektedir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 0 \tag{3.1}$$

Yukarıdaki denklemde x-bağımsız değişken, y-x e bağlı değişken, k^2 bir parametredir. Bu diferensiyel denklemin analitik çözümünden y fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$y(x) = a\sin(kx) + b\cos(kx) \tag{3.2}$$

Denklem (3.1) deki ikinci dereceden diferensiyel denklemin çözüm fonksiyonun a ve b gibi iki tane keyfi sabit vardır. Bu keyfi sabitleri, $y(0) = 0 = a\sin(0) + b\cos(0)$ den $b = 0$ ve $y(1) = 0 = a\sin(k \times 1)$ $a \neq 0$ ve $\sin(k) = 0$ dan $k = \pm n\pi, n = 1, 2, 3, ...$ (öz)değerlerini aldığında $y(x)$ fonksiyonu bağlı durum koşullarını sağlamış olur. k parametresi $y(x)$ fonksiyonun özel değerler almasını sağlayan *karakteristik* veya *özdeğer*dir.

3.1. ÖZDEĞER PROBLEMİ

Uygulamalı matematik problemlerinin bir çoğunda denklem (3.3) te olduğu gibi matris formunda verilen çizgisel denklem sistemi,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \tag{3.3a}$$

şeklinde olsun. Bu denklem sisteminin sağ tarafını λ gibi skaler bir nicelikle çarptığımızda

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{3.3b}$$

yazılabiliyorsa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

elde edilir. Genel olarak yukarıdaki denklemleri daha kısa formda

$$A\boldsymbol{x} = \lambda I\boldsymbol{x} \tag{3.5a}$$

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = 0 \tag{3.5b}$$

şeklinde de yazılabilir. Denklem (3.5) deki A gerçel ve simetrik katsayılar matrisini, $\boldsymbol{x}$ bağımsız değişkenlerin oluşturduğu sütun matrisini, λ skaler nicelik ve I birim matrisi göstermektedir. Denklem (3.5) de x sıfır olamayacağına göre

$$|A - \lambda I| = 0 \tag{3.5c}$$

olmalıdır. Bu ifade özdeğer problemidir. Denklem (3.5b) ye karakteristik denklem, λ ya *karakteristik değer* veya *özdeğer* ve λ *özdeğerlerine* göre değer alan x değerlerine ise *karakteristik fonksiyon* veya *özvektör* veya *özfonksiyon* denir.

Örnek 3.2. Matris eşitliğinin özdeğer ve özvektörlerinin hesaplanması.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$$

Yukarıdaki matris denkleminde karakteristik eşitliktir

ve determinantı alındığında

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)=0$$

veya

$$-\lambda^3+5\lambda^2-2\lambda-8=0$$

elde edilir. Bu polinomu sıfır yapan kök değerleri $\lambda_1=4$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-1$ olarak bulunur. Her özdeğer $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ için özfonksiyonlar aşağıdaki gibi matrisler kullanılarak bulunabilir:

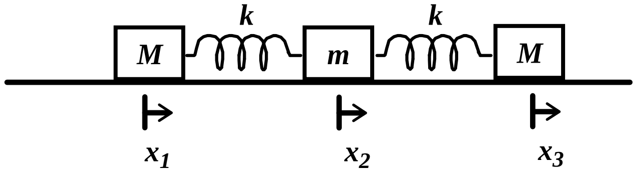
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ veya } \begin{array}{rl} 4x_1+x_2=4x_1 & x_1 \text{ keyfi bir değer alır} \\ 2x_2+x_3=4x_2 & x_2=0 \text{ değerini alır} \\ -x_3=4x_3 & x_3=0 \text{ değerini alır} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ veya } \begin{array}{rl} 4x_1+x_2=2x_1 & x_1=x_2/2 \\ 2x_2+x_3=2x_2 & x_2 \text{ keyfi değer alır} \\ -x_3=2x_3 & x_3=0 \text{ değerini alır} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ veya } \begin{array}{rl} 4x_1+x_2=-x_1 & x_1=x_3/15 \\ 2x_2+x_3=-x_2 & x_2=-x3/3 \\ -x_3=-x_3 & x_3 \text{ keyfi değer alır} \end{array}$$

Denklem sisteminin özfonksiyonları $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 1/15 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dir.

Örnek 3.3. Şekil 3.1 deki gibi Hooke yasasına uyan ve yay sabitleri k olan yaylarla 3 kütle küçük yer değişimleri $(x_1>x_2>x_3)$ yapmaktadır. Ayrıca bütün kütlelerin x-ekseni üzerinde kalacak şekilde doğrusal hareket ettiklerini ve kütleler ile zemin arasında sürtünmenin olmadığı durumda sistemin özdeğerlerini ve özfonksiyonlarını belirleyiniz.



Şekil 3.1. Birbirlerine yaylarla bağlanmış yatay düzlemde üç kütle problemi.

Her kütle için farklı konumlar (yer değiştirmeler) seçilir ve Newton'un ikinci yasasından ($F = Ma = Md^2x/dt^2 = -k\Delta x$) kullanılarak,

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{k}{M}(x_1 - x_2) \tag{3.6a}$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{k}{m}(x_2 - x_1) - \frac{k}{m}(x_2 - x_3) \tag{3.6b}$$

$$\frac{d^2x_3}{dt^2} = -\frac{k}{M}(x_3 - x_2) \tag{3.6c}$$

denklemleri yazılabilir. Denklemlerde t zamanı, M ve m yaylara tutturulmuş kütleleri, x_i kütlelerin yerdeğiştirmesini ve k yay sabitini göstermektedir. Hareketli kütleler sisteminin ortak frekansları olan w yani sistemin özdeğerleri hesaplanacaktır. Bu w frekansları, sistemin normal kipleri olacaktır. Yukarıdaki denklem (3.6) nin çözümü olan

$$x_i = x_{i0}e^{jwt}\ ,\ i = 1,2,3\quad (j\ \textit{kompleks sayı}) \tag{3.7}$$

fonksiyonu, denklemin analitik çözümünden kolaylıkla bulanabilir. Denklem (3.7), denklem (3.6) da kullanılırsa,

$$-w^2x_1 = -\frac{k}{M}(x_1 - x_2) \tag{3.8a}$$

$$-w^2x_2 = -\frac{k}{m}(x_2 - x_1) - \frac{k}{m}(x_2 - x_3) \tag{3.8b}$$

$$-w^2x_3 = -\frac{k}{M}(x_3 - x_2) \tag{3.8c}$$

denklemleri elde edilir ($-w^2 = \frac{d^2}{dt^2}$). Bu denklemler,

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{M} & -\frac{k}{M} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{M} & \frac{k}{M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = w^2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

asimetrik matrise sahip olan matris-özdeğer denklemi şeklinde yazılabilir. Buradan seküler eşitlik veya determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{M} - w^2 & -\frac{k}{M} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - w^2 & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{M} & \frac{k}{M} - w^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left| \begin{matrix} \frac{k}{M} - w^2 & -\frac{k}{M} & 0 & \frac{k}{M} - w^2 & -\frac{k}{M} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - w^2 & -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - w^2 \\ 0 & -\frac{k}{M} & \frac{k}{M} - w^2 & 0 & -\frac{k}{M} \end{matrix} \right| = 0 \tag{3.10}$$

olarak elde edilir. Bu determinanttan w^2 ye göre elde edilen polinom

$$(\tfrac{k}{M} - w^2)(\tfrac{2k}{m} - w^2)(\tfrac{k}{M} - w^2) - (-\tfrac{k}{M})(-\tfrac{k}{m})(\tfrac{k}{M} - w^2) - (-\tfrac{k}{M})(-\tfrac{k}{m})(\tfrac{k}{M} - w^2) = 0$$

$$(\tfrac{k}{M} - w^2)(\tfrac{2k}{m} - w^2)(\tfrac{k}{M} - w^2) - (\tfrac{k}{M})(\tfrac{k}{m})(\tfrac{k}{M} - w^2) - (\tfrac{k}{M})(\tfrac{k}{m})(\tfrac{k}{M} - w^2) = 0$$

$$(\tfrac{k}{M} - w^2)[(2\tfrac{k}{m} - w^2)(\tfrac{k}{M} - w^2) - 2(\tfrac{k}{M})(\tfrac{k}{m})] = 0$$

En soldaki $\frac{k}{M} - w^2 = 0$ dan $w_2^2 = \frac{k}{M}$, köşeli parantez içindeki ifadeden $w_1^2 = 0$ ve

yine köşeli parantez içindeki ifadeden

$$2\tfrac{k}{M}\tfrac{k}{m} - \tfrac{k}{M}w^2 - 2\tfrac{k}{m}w^2 - 2\tfrac{k}{M}\tfrac{k}{m} + (w^2)^2 = 0$$

$-\frac{k}{M}w^2 - 2\frac{k}{m}w^2 + (w^2)^2 = 0$ veya $\frac{k}{M} + 2\frac{k}{m} = w_3^2$

özdeğerleri elde edilir. Bu özdeğerler denklem (3.9) da kullanılarak özvektörler elde edilir. $w^2 = 0$ için denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{M} & -\frac{k}{M} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{M} & \frac{k}{M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \quad &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \quad \text{veya} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Bu denklem sisteminin çözümünden $x_1 = x_2 = x_3$ elde edilir. Bu sonuç kütlelerin yerdeğiştirmelerinin birbirlerine eşit ve aynı yönde olduğunu belirtir.

$w^2 = k/M$ durumunda denklem (3.9) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{M} & -\frac{k}{M} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{M} & \frac{k}{M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{k}{M}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{M} - \frac{k}{M} & -\frac{k}{M} - \frac{k}{M} & -\frac{k}{M} \\ -\frac{k}{m} - \frac{k}{M} & \frac{2k}{m} - \frac{k}{M} & -\frac{k}{m} - \frac{k}{M} \\ -\frac{k}{M} & -\frac{k}{M} - \frac{k}{M} & \frac{k}{M} - \frac{k}{M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2k}{M} & -\frac{k}{M} \\ -\frac{k}{m} - \frac{k}{M} & \frac{2k}{m} - \frac{k}{M} & -\frac{k}{m} - \frac{k}{M} \\ -\frac{k}{M} & -\frac{2k}{M} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

veya

$$0x_1 - \frac{2k}{M}x_2 - \frac{k}{M}x_3 = 0 \text{ veya } -2x_2 = x_3$$
$$-(\frac{k}{m} + \frac{k}{M})x_1 + (\frac{2k}{m} - \frac{k}{M})x_2 - (\frac{k}{m} + \frac{k}{M})x_3 = 0 \quad (3.12)$$
$$-\frac{k}{M}x_1 - \frac{2k}{M}x_2 + 0x_3 = 0 \text{ veya } x_1 = -2x_2$$

yazılabilir. Bu denklem sistemi çözülecek olursa, sistemin özvektörlerini $x_1 = -x_3$, $x_2 = 0$ olarak elde edilir. Bu durum kenarlardaki M kütlelerinin zıt doğrultularda ortadaki kütleye doğru hareket ettiğini ve ortadaki m kütlesinin ise hareketsiz olduğunu ifade eder.

Özdeğerin $w^2 = \frac{k}{M} + 2\frac{k}{m}$ değerini aldığı durumda ise özvektörler

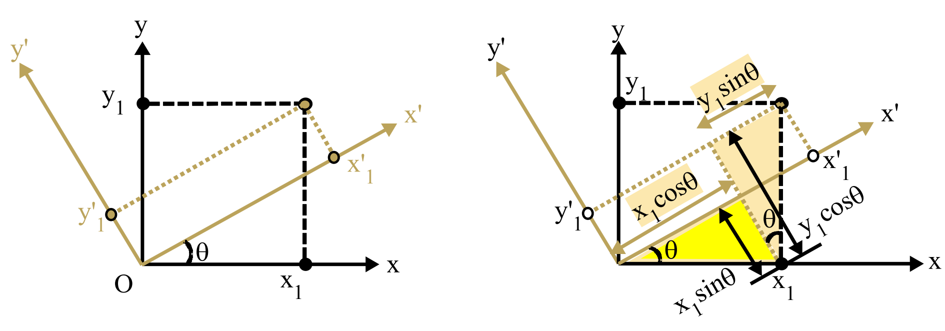
$$x_1 = x_2 \text{ ve } x_3 = -\frac{2M}{m}x_1 \quad (3.13)$$

olarak bulunur. Bu durumda ise kenarlardaki kütleler zıt yönlerde hareket ederlerken, ortadaki m kütlesi kenarlardaki kütlelerden birine göre ters yönde hareket etmektedir.

Kütleler sisteminin x-ekseni boyunca yapacağı hareketler yukarıda elde edilen özvektörlerin (yer değiştirmelerin) kombinasyonları şeklinde olacaktır.

3.3. KOORDİNAT DÖNÜŞÜMLERİ

Şekil 3.4 deki gibi kartezyen koordinat sistemindeki bir noktanın sabit kalarak sadece koordinat eksenleri döndürülürse yeni koordinat sisteminde bu noktanın konumu aşağıdaki gibi tanımlanabilir.



Şekil 3.4. Koordinat eksenlerinin dönüşümü.

$$x'_1 = x_1\cos\theta + y_1\sin\theta$$
$$y'_1 = -x_1\sin\theta + y_1\cos\theta \quad (3.37)$$

Bu eşitlikler matris formunda aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Denklem (3.38) ü daha sade bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\vec{x}' = T\,\vec{x} \tag{3.39}$$

Denklemdeki $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$dir. Denklem (3.39) u özdeğer eşitliği şeklinde ifade edebilmek için $A\vec{x}' = \lambda\vec{x}'$ denkleminde kullanırsak,

$$AT\,\vec{x} = \lambda T\,\vec{x} \tag{3.40}$$

ifadesi yazılabilir. Denklem (3.40) da eşitliğin her iki tarafı T' ile çarpılırsa

$$T'AT\,\vec{x} = \lambda T'\,T\,\vec{x} \tag{3.41}$$

yazılabilir. Denklem (3.41) deki T', T dönüşüm matrisinin transpozu aynı zamanda ters matrisidir ($T'\,T\ = I$):

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

$$T'AT\,\vec{x} = \lambda I\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

$$(T'AT - \lambda)\,\vec{x} = 0 \tag{3.43}$$

Özdeğer denklemi elde edilmiş olur. Denklem (3.43) in sol tarafındaki parantez içindeki terim sıfıra eşitlenerek özdeğerler bulunabilir. Böylelikle, transpozu ($T' = T^{\mathrm{T}}$) ile tersi aynı olan bir T (Transport) matrisi yardımı ile denklem sistemini temsil eden A katsayılar matrisi köşegen matrisi haline getirilebilir.

3.4. KUVVET (POWER) YÖNTEMİ

Bir özdeğer probleminin matris formunun

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{3.61}$$

şeklinde olduğunu düşünelim. Denklemde A-katsayılar matrisi, x-özfonksiyonu ve λ-özdeğeri göstermektedir. Yukarıdaki denklemin λ özdeğerlerini bulabilmek kullanılan yöntemlerden biriside kuvvet yöntemidir. İşlem şu şekilde yapılır:

(**1**) $\boldsymbol{x}$ vektör matrisi için ilk tahmini değerler girilir ($\boldsymbol{x}^{(0)}$). $\boldsymbol{x}$ in bileşenlerinden biri birim vektör şeklinde seçilir.

(**2**) $A\boldsymbol{x}^{(0)} = y^{(1)}$ işlemi (matris çarpımı) gerçeklenir,

(**3**) $y^{(1)}$ yeniden ayarlanır, yani $x^{(1)}$ hesaplanır,

$$y^{(1)} = \lambda^{(1)}x^{(1)} \tag{3.62a}$$

veya

$$x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{\lambda^{(1)}} \tag{3.62b}$$

(**4**) 2nci ve 3ncü adımları $x^{(0)} - x^{(1)}$ farkına bakarak veya yeni $x^{(0)}$ ı $x^{(1)}$ deki değerler olarak alıp, atamasını yapıp (yakınsama) işlemine yeterli kriterler sağlanana kadar devam edilir. Bu öteleme yöntemine güç (power) yöntemide denmektedir. Genel algoritması

$$A\boldsymbol{x}^{(k)} = y^{(k+1)} = \lambda^{(k+1)}x^{(k+1)} \tag{3.63}$$

şeklinde verilebilir. Yakınsama yapılırken λ nın mutlak olarak en büyük değeri A nın özdeğeri, $\boldsymbol{x}$ değerleride bu özdeğerlere ait özfonksiyonlardır. Birim matrisin elemanlarından biri sıfıra yaklaşıyorsa, başka bir özdeğer için birim matris seçilir. Yakınsama çok yavaş bir şekilde devam ediyorsa, yani en büyük özdeğerler birbirine çok yakınsa güç yöntemi başarılı olmamaktadır.

k	λ	x_1	x_2	x_3
0		1.0000	1.0000	1.0000
1	4.0000	1.0000	1.5000	0.7500
2	4.0000	1.0000	1.4375	0.8125
3	4.0625	1.0000	1.4462	0.8000
4	4.0462	1.0000	1.4449	0.8023
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
8	4.0489	1.0000	1.4450	0.8019

Bu yöntemi bir örnek üzerinde inceleyelim:

Örnek 3.9. Aşağıdaki A matrisinin en büyük özdeğerini ve bununla ilgili olan özvektörünü güç yöntemini kullanarak bulunuz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

x özfonksiyonları için başlangıç değerlerini $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ olarak alalım.

$$Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.000 \\ 6.000 \\ 3.000 \end{pmatrix};$$

Katsayılar matrisi ile özfonksiyonların çarpımından yeni özfonksiyonlar elde edilir. Bu özfonksiyonlardaki ilk bileşeni, birim vektör olacak şekilde skalalandırılırsa, $\lambda^{(1)} = 4.000$ ve yeni özfonksiyonlar bu değere göre yeniden yazılırsa

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.500 \\ 0.750 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Başlangıçtaki katsayılar matrisini bu özfonksiyonlar ile çarparsak

$$Ax^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.500 \\ 0.750 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.000 \\ 5.750 \\ 3.250 \end{pmatrix}; \ \lambda^{(2)} = 4.000 \text{ ve } x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 1.4375 \\ 0.8125 \end{pmatrix}$$

ifadeleri elde edilir. İşlemer bu şekilde öteleme yapılarak sürdürülür. Burada iki öteleme sonucunda elde edilen değerler verilmektedir. Sonuç olarak elde edilen özdeğer ve özvektörler bir süre sonra aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\lambda_1 = 4.0489 \text{ ve } x_1 = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.445 \\ 0.802 \end{pmatrix}$$

İşlemler özfonksiyonlar fazla değişmemeye başlayıncaya kadar devam ettirilir.