3.4. KUVVET (POWER) YÖNTEMİ

Bir özdeğer probleminin matris formunun

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{3.61}$$

şeklinde olduğunu düşünelim. Denklemde A-katsayılar matrisi, x-özfonksiyonu ve λ-özdeğeri göstermektedir. Yukarıdaki denklemin λ özdeğerini bulabilmek için kuvvet yöntemi işlemleri aşağıdaki gibi yapılabilir :

$(\mathbf{1})$ $\boldsymbol{x}$ vektör matrisi için ilk tahmini değerler girilir $(\boldsymbol{x}^{(0)})$. $\boldsymbol{x}$ in bileşenleri birim vektör şeklinde seçilir (büyüklüğü 1 olsun),

$(\mathbf{2})$ $A\boldsymbol{x}^{(0)} = y^{(1)}$ işlemi (yani matris çarpımı) yapılır,

$(\mathbf{3})$ 2nci adımdaki sonuç matrisi $y^{(1)}$ yeniden ayarlanır, yani sütun matrisi ilk satırındaki (öz)değere bölünür ve bu $x^{(1)}$ olarak adlandırılır,

$$x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{\lambda^{(1)}} \tag{3.62}$$

$(\mathbf{4})$ 2nci ve 3ncü adımlarda elde edilen $x^{(0)} - x^{(1)}$ fark(lar)ına bakılır. Fark değerleri ilgili kriterden küçükse işlemler sonlandırılır, değilse $x^{(0)} = x^{(1)}$ ataması yapılarak 2nci adıma dönülür. Kuvvet yönteminin genel algoritması aşağıdaki denklemdeki gibidir:

$$A\boldsymbol{x}^{(k)} = y^{(k+1)} = \lambda^{(k+1)}x^{(k+1)} \tag{3.63}$$

Yakınsama yapılırken λ nın mutlak olarak en büyük değeri A nın özdeğeri, $\boldsymbol{x}$ değerleride bu özdeğerlere ait özfonksiyonlarıdır. Birim matrisin elemanlarından biri sıfıra yaklaşıyorsa, başka bir özdeğer için yeni birim matris oluşturulabilir. Yakınsama çok yavaş bir şekilde devam ediyorsa, yani en büyük özdeğerler birbirine çok yakınsa kuvvet yöntemi başarılı olamamaktadır.

k	λ	x_1	x_2	x_3
0		1.0000	1.0000	1.0000
1	4.0000	1.0000	1.5000	0.7500
2	4.0000	1.0000	1.4375	0.8125
3	4.0625	1.0000	1.4462	0.8000
4	4.0462	1.0000	1.4449	0.8023
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
8	4.0489	1.0000	1.4450	0.8019

Örnek 3.9. Aşağıdaki A matrisinin en büyük özdeğerini ve bununla ilgili olan özvektörünü kuvvet yöntemini kullanarak bulunuz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

x özfonksiyonları için başlangıç değerlerini $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ olarak alalım.

$$Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.000 \\ 6.000 \\ 3.000 \end{pmatrix} = y^{(1)}$$

Katsayılar matrisi ile özfonksiyonların çarpımından yeni özfonksiyonlar elde edilir. Bu özfonksiyonlardaki ilk bileşeni, birim vektör olacak şekilde skalalandırılırsa, $\lambda^{(1)} = 4.000$ ve yeni özfonksiyonlar bu değere göre yeniden yazılırsa

$$x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{\lambda^{(1)}} = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.500 \\ 0.750 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Başlangıçtaki katsayılar matrisini bu özfonksiyonlar ile çarparsak

$$Ax^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.500 \\ 0.750 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.000 \\ 5.750 \\ 3.250 \end{pmatrix} = y^{(1)};$$

$\lambda^{(2)} = 4.000$ ve $x^{(2)} = \frac{y^{(2)}}{\lambda^{(2)}} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 1.4375 \\ 0.8125 \end{pmatrix}$