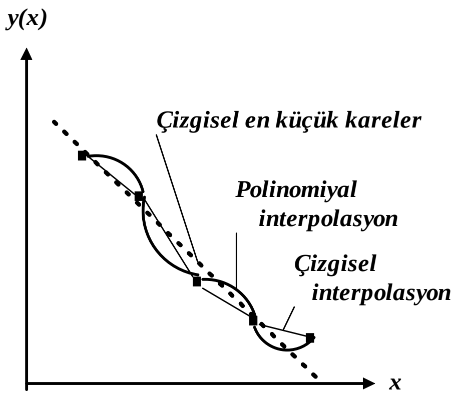
4.3. EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ

Daha önceki bölümlerde, elde edilen verilerin herbirinden geçen bir fonksiyon bulmaya çalışmıştık. Bu işlem için, çizgisel ve polinom şeklindeki fonksiyonları kullanarak interpolasyon yapmıştık. Şekil 4.4 de çizgisel, polinomiyal interpolasyon ile birlikte bütün veri değerlerinden geçmeyen ve çizgisel en küçük kareler yöteminden elde edilen bir doğru (kesikli çizgi) verilmiştir. Veriler için en uygun fonksiyonun seçilmesi için bir yöntem Legendre tarafından 1806 da ilk defa önerilmiştir. Bu yöntemde önerilen fonksiyon ile veri değerleri arasındaki farkların karelerinin toplamının minimuma indirgenmesi amaçlanmıştır. En-küçük kareler yöntemi denilen bu yönteme göre veriler için en uygun fonksiyon elde edilebilir.



Şekil 4.4 En küçük kareler yöntemi ve polinom interpolasyon grafiği.

Şimdi verilerin hepsinden geçmeyen, fakat belirli bir hata aralığında, verilere daha uygun olan bir fonksiyon arayalım. Bu fonksiyon, veriler doğrusallık, polinom, üstel, sinüsel vs özellikler gösteriyorsa, bu özelliklere yakın fonksiyonu bulabilmek için *en-küçük kareler yöntemini* kullanabiliriz. Bu yöntem verilerin fit edilmesi için kullanılan yöntemler arasında en yaygın olan yöntemlerden birisidir.

4.3.1. ÇİZGİSEL EN-KÜÇÜK KARELER FONKSİYONU

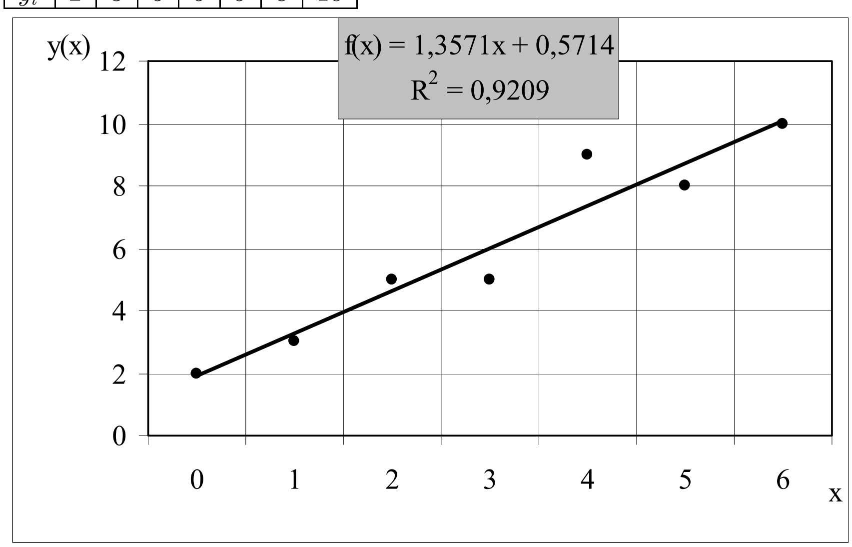
Aşağıdaki çizelgedeki verilere uygun bir fonksiyonun, çizgisel olduğunu kabul edelim (Şekil 4.5). Veriler için önerilen fonksiyonun

$$f(x) = a_0 + a_1 x \tag{4.11}$$

şeklinde çizgisel bir fonksiyon olduğunu kabul edelim.

Çizelge 4.2 Çizgisel fonksiyona ait veriler.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	2	3	5	5	9	8	10



Şekil 4.5 En uygun çizgisel fonksiyonun bulunması.

Tanımlanan çizgisel $f(x) = a_0 + a_1 x$ fonksiyonundaki a_0 ve a_1 in belirlenebilmesi için

$$S = \sum_{i=1}^{n}(f_i - y_i)^2 \tag{4.12}$$

değerinin minimum olması gerekir. Buradaki f_i önerilen fonksiyondur. $f_i - y_i$ fark değerine artık değer denir. S değerini minimum yapmak için, S nin a_0 ve a_1 katsayılarına göre türevleri alınır ve sıfıra eşitlenir:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \tag{4.13}$$

Bu türevlerden yararlanarak,

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial a_0}(a_0 + a_1 x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}2(a_0 + a_1 x - y_i) = 0 \tag{4.14a}$$

ve

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial a_0}(a_0 + a_1 x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}2x_i(a_0 + a_1 x \ - y_i) = 0 \tag{4.14b}$$

denklemleri elde edilir. Denklem (4.14a) ve (4.14b) den

$$\sum_{i=1}^{n}y_i = na_0 + a_1\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{4.15a}$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n}x_i y_i = a_0\sum_{i=1}^{n}x_i + a_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \tag{4.15b}$$

elde edilir. Buradaki denklemlerde n toplam veri sayısıdır. Yukarıdaki denklemleri a_0 ve a_1 katsayılarına göre çözerek, denklem (4.15a) ve (4.15b) den en küçük karelerin uygulanabileceği çizgisel fonksiyonun katsayıları elde edilmiş olur.

Örnek 4.2. Çizelge 4.2 deki verileri kullanarak bu veriler için en uygun doğru denklemini bulunuz.

Denklem (4.15a) ve (4.15b) den,

x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	2	3	5	5	9	8	10
$\sum_{i=1}^{7}y_i$	n	$\sum_{i=1}^{7}x_i$	$\sum_{i=1}^{7}x_i y_i,$	$\sum_{i=1}^{7}x_i^2$			
42	7	21	164	91			

değerleri hesaplanacaktır. Bu değerler kullanarak a_0 ve a_1 katsayıları için denklemler kurulur:

$$42 = 7a_0 + 21a_1,$$

$$164 = 21a_0 + 91a_1$$

Bu iki denklemi a_0 ve a_1 e göre çözersek $a_0 = 1.929639$ ve $a_1 = 1.356787$ değerlerini elde edilir. Bu durumda veriler için önerilen çizgisel denklem,

$$f(x_i) = 1.929639 + 1.356787x_i \tag{4.16}$$