

4.3.2. POLİNOMİYAL EN-KÜÇÜK KARELER FONKSİYONU

Doğrusal bir fonksiyon kullanılarak verilerin uygun hale getirilmesi yanında, m nci dereceden polinom şeklinde fonksiyonlar kullanılarak veriler için uygun fonksiyonlar geliştirilebilir. Yapılacak işlemler doğrusal fonksiyon için yapılan işlemlerin aynısıdır. Yani S değerinin minimum yapacak katsayı değerleri bulunmalıdır.

$$S = \sum_{i=1}^n (f_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n ((a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_mx_i^m) - y_i)^2 \quad (4.17)$$

S değerini minimum yapmak ve $m + 1$ değişkenli fonksiyonu kurmak için $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ katsayılarının elde edilmesi gerekmektedir.

$m + 1$ tane kısmi türevli denklem edilir:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^n 2(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_mx_i^m - y_i) = 0 \quad (4.18a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^n 2x_i(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_mx_i^m - y_i) = 0 \quad (4.18b)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_m} = \sum_{i=1}^n 2x_i^m(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_mx_i^m - y_i) = 0 \quad (4.18c)$$

Böylece $m + 1$ tane çizgisel denklem elde edilmektedir:

$$a_0n + a_1\sum x_i + a_2\sum x_i^2 + \dots + a_m\sum x_i^m - \sum y_i = 0 \quad (4.19a)$$

$$a_0\sum x_i + a_1\sum x_i^2 + a_2\sum x_i^3 + \dots + a_m\sum x_i^{m+1} - \sum x_i y_i = 0 \quad (4.19b)$$

$$a_0\sum x_i^2 + a_1\sum x_i^3 + a_2\sum x_i^4 + \dots + a_m\sum x_i^{m+2} - \sum x_i^2 y_i = 0 \quad (4.19c)$$

$$a_0\sum x_i^m + a_1\sum x_i^{m+1} + a_2\sum x_i^{m+2} + \dots + a_m\sum x_i^{m+m} - \sum x_i^m y_i = 0 \quad (4.19d)$$

Yukarıdaki denklemlerdeki \sum işareti, toplamın $i = 1$ den n ye kadar değiştiğini göstermektedir.

Örnek 4.3. Aşağıda verilen değerleri kullanarak (x_i, y_i) noktalarına ait en uygun parabol veya bir polinomu bulunuz.

Veriler, eşit aralıklı değildir. Veriler için ikinci dereceden bir polinom seçmek uygundur. En uygun fonksiyonu bulabilmek için $x_i, y_i, x_i y_i, x_i^2, x_i^3, x_i^4$ ve $x_i^2 y_i$ değerleri hesaplanır. Hesaplanan bu değerler yukarıdaki çizelgede 4, 5, 6, 7 ve 8nci sütunlarda verilmiştir. 9ncu sütunda ise önerilen fonksiyondan elde edilen değerler verilmiştir. Veriler için önerilen fonksiyon $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ şeklinde olsun. Veriler için aşağıdaki çizelgeyi hazırlamak yararlı olacaktır.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	$x_i^2 y_i$	x_i^3	x_i^4	$f(x_i)$
1	1	2	2	1	2	1	1	1.8787
2	3	7	21	9	63	27	81	4.6812
3	4	8	32	16	128	64	256	6.9485
4	5	10	50	25	250	125	625	8.6801
5	6	11	66	36	396	216	1296	9.8775
6	7	11	77	49	539	343	2401	10.5392
7	8	10	80	64	640	512	4096	10.6657
8	9	9	81	81	729	729	6561	10.2570
9	10	8	80	100	800	1000	10000	9.3131
\sum	53	76	489	381	3547	3017	25317	

Çizelgeden elde edilen verilerle şu denklem sistemi kurabilir:

$$9a_0 + 53a_1 + 381a_2 = 76$$

$$53a_0 + 381a_1 + 3017a_2 = 489$$

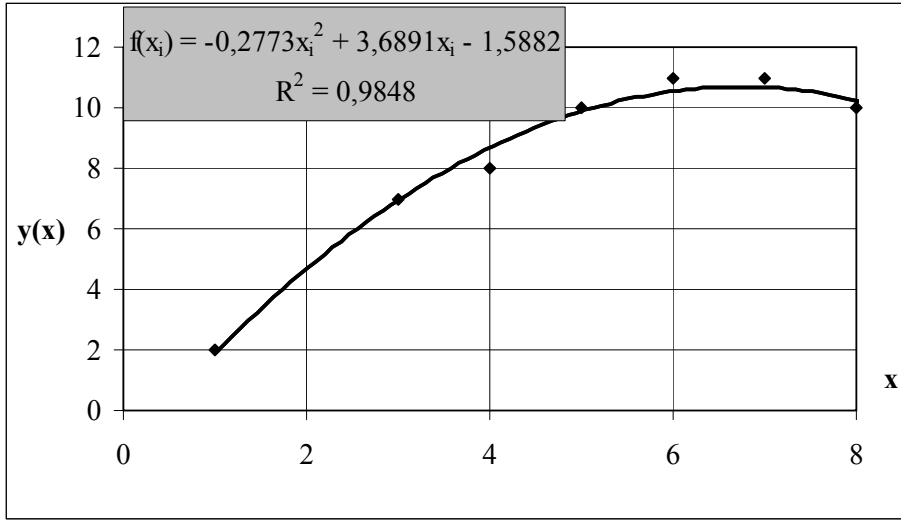
$$381a_0 + 3017a_1 + 25317a_2 = 3547$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 53 & 381 \\ 53 & 381 & 3017 \\ 381 & 3017 & 25317 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76 \\ 489 \\ 3547 \end{pmatrix}$$

Yukarıdaki verilere göre oluşturulan denklem sistemi çözülecek olursa *ikinci* dereceden polinomun katsayıları $a_0 = -1.4596$, $a_1 = 3.6053$, $a_2 = -0.2676$ elde ederiz ve buradan önerilen fonksiyonun denklemi aşağıdaki gibidir:

$$f(x_i) = -1.4596 + 3.6053x_i - 0.2676x_i^2$$

Şekil 4.5 de MS-Excel de Add-Tredline seçeneği ile veriler için elde edilmiş $f(x)$ fonksiyonu ve grafiği görülmektedir. Burada elde edilen sonuçlar yukarıdaki sonuçlara çok yakındır. MS-Excel de Add-Tredline (Eğri-Ekle) seçeneğine, verilerin grafiği çizildikten sonra fare işaretçisini grafikteki bir veri noktası üzerine getirip farenin sağ düğmesine bir kere tıklayınca karşınıza gelen küçük pencereden ulaşılabilir.



Şekil 4.5a. MS-Excel Add-Tredline ile verilerin parabole uygun hale getirilmesi.

pol_least.xls									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
2	i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	$x_i^2 y_i$	x_i^3	x_i^4	$f(x_i)$
3	1	1	2	2	1	2	1	1	1,8236
4	2	3	7	21	9	63	27	81	6,9834
5	3	4	8	32	16	128	64	256	8,7314
6	4	5	10	50	25	250	125	625	9,9248
7	5	6	11	66	36	396	216	1296	10,5636
8	6	7	11	77	49	539	343	2401	10,6478
9	7	8	10	80	64	640	512	4096	10,1774
10	8	9	9	81	81	729	729	6561	9,1524
11	9	10	8	80	100	800	1000	10000	7,5728
12	Toplam	53	76	489	381	3547	3017	25317	

Şekil 4.5a. MS-Excel Add-Tredline ile verilerin parabole uygun hale getirilmesi.

4.3.4. ÜSTEL FONKSİYONLAR İLE EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ

Bazen veriler polinomiyal olmayan özellik gösterebilir. Bu durumda verilerin en küçük kareler yöntemine göre fit edilmesi zordur. Örneğin bu verilerin değişimi üstel veya periyodik fonksiyonlara benzeyebilir. Bu yüzden veriler için en uygun fonksiyon

$$f(x) = ax^b \quad \text{veya} \quad f(x) = ae^{bx} \quad (4.28)$$

şeklinde önerilebilir (x -bağımsız değişken). Bu fonksiyonların logaritmaları alınırsa,

$$\ln(f(x)) = \ln(a) + b \ln(x) \quad \text{veya} \quad \ln(f(x)) = \ln(a) + bx \quad (4.29a)$$

$F(X) = \ln(f(x))$, $A = \ln(a)$, $B = b$ ve $X = \ln(x)$ değişken tipleri seçilerek, önerilen fonksiyon çizgisel bir fonksiyona dönüştürülebilir:

$$F(X) = A + B X = A + bX \quad (4.29b)$$

Bu yeni fonksiyonlara en küçük kareler yöntemini uygulanırsa aşağıdakiler yazılabilir:

$$S = \sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (A + b X_i - y_i)^2 \quad (4.30a)$$

$$S = \sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (A + b x_i - y_i)^2 \quad (4.30b)$$

Denklem (4.30) un A ve b katsayılarına göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenerek S yi minimum yapacak A ve b katsayıları hesaplanabilir. Denklemde y_i ölçülen yada gözlenen değerleri ve Y_i önerilen fonksiyondan elde edilen değerleri ve i alt simgesi veri numarasını gösteren bir indis değeridir.

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 0 = \sum_{i=1}^n (2)(A + b X_i - y_i) \quad (4.31a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 = \sum_{i=1}^n (2)(X_i)(A + b X_i - y_i) \quad (4.31b)$$

veya

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 0 = \sum_{i=1}^n (2)(A + b x_i - y_i) \quad (4.32a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 = \sum_{i=1}^n (2)(x_i)(A + b x_i - y_i) \quad (4.32b)$$

Bu denklemleri yeniden düzenler ve A ve b ye göre çözersek,

$$\sum_{i=1}^n y_i = A \sum_{i=1}^n 1 + b \sum_{i=1}^n X_i \quad (4.33a)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i y_i = A \sum_{i=1}^n X_i + b \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (4.33b)$$

veya

$$\sum_{i=1}^n y_i = A \sum_{i=1}^n 1 + b \sum_{i=1}^n x_i \quad (4.34a)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = A \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (4.32b)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem sisteminin A ve b ye göre çözümlenmesinden önerilen üstel fonksiyonlar için bilinmeyen katsayılar elde edilir. Burada işlemleri yaparken dikkat edilmesi gereken şey verilerin logaritmasının alındığıdır. Denklem sistemi çözümlendikten sonra değerlerin anti logaritmaları alınarak önerilen fonksiyonların sabitleri bulunur. Bu yöntemler için programlar burada verilmemiştir. Daha önceki çizgisel fonksiyon ile en uygun doğru bulunması programlarında küçük değişiklikler yaparak bu tür fonksiyonlara uyan verilere uygulayabilirsiniz.

Örnek 4.4. Aşağıda veriler için en uygun fonksiyonu elde ediniz.

i	T(Sıcaklık)	P(basınç)	log(T)	log(P)	$P(T) = 10^{-40.418} \times T^{16.314}$
1	0.0	0.1803	2.4362	-0.7440	0.2116
2	10.0	0.3626	2.4518	-0.4406	0.3806
3	20.0	0.6903	2.4669	-0.1610	0.6706
4	30.0	1.2527	2.4814	0.0978	1.1595
5	40.0	2.1775	2.4955	0.3380	1.9693
6	50.0	3.6420	2.5092	0.5613	3.2895
7	60.0	5.8812	2.5224	0.7695	5.4095
8	70.0	9.2000	2.5353	0.9638	8.7657
9	80.0	13.9830	2.5478	1.1456	14.0087
10	90.0	20.7030	2.5599	1.3160	22.0962
11	100.0	29.9220	2.5717	1.4760	34.4237

Yukarıdaki veriler kullanılarak denklem sistemi oluşturulabilir:

$$\sum_{i=1}^{11} = 11$$

$$\sum_{i=1}^{11} T_i = 550.0$$

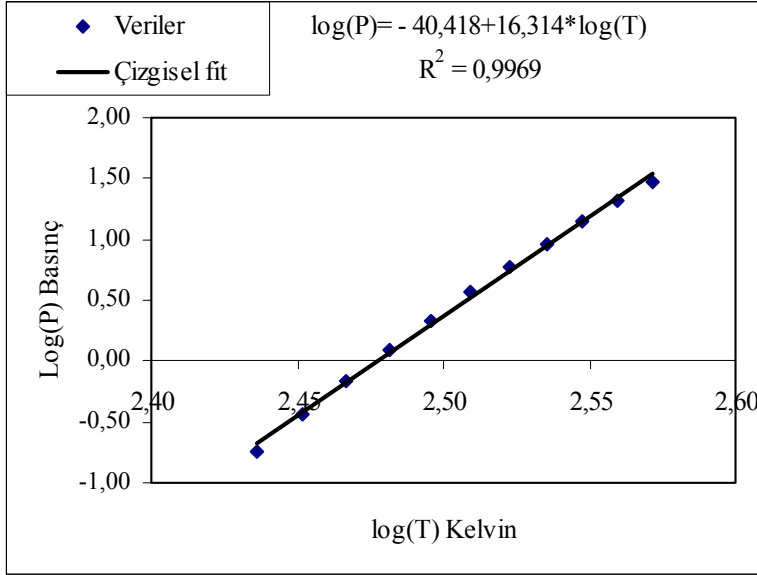
$$\sum_{i=1}^{11} T_i^2 = 38500$$

$$\sum_{i=1}^{11} y_i = 5.3$$

$$\sum_{i=1}^{11} x_i y_i = 1393.8$$

$$11 A + 550.0 b = 5.3$$

$$550 A + 38500 b = 1393.8$$



Şekil 4.6. Verilerin üstel fonksiyonlara MS-Excel Add-Tredline ile uydurulması.

Yukarıdaki Şekil 4.6 da logaritmaları alınmış verilere en uygun doğru fonksiyonu çizgisel fit işlemi yapıldıktan sonra elde edilmiştir (MS Excel Add-Tredline veya Eğri-Ekle seçeneğinden). Çizgisel fit işlemi için $\log(P) = \log(a) + b \log(T)$ yazılabilir yani $\log(P) = -40.418 + 16.314 \times \log(T)$ ise, $P(T) = 10^{-40.418} \times T^{16.314}$ dür.